RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 giugno 1926

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Il principio di Doppler e la ipotesi balistica della luce.* Nota dei Soci O. M. Corbino e T. Levi-Civita[1].

La interpretazione dei fenomeni ottici secondo la teoria classica fornisce uno schema cinematico assai semplice per spiegare il principio di Doppler e il conseguente spostamento delle righe spettrali emesse da una sorgente in moto. Tale spostamento risulta collegato alla velocità relativa di avvicinamento o di allontanamento della sorgente e dell'osservatore.

Dimostreremo in questa Nota che secondo quello schema cinematico, se si ammette la ipotesi balistica della luce, e precisamente che la velocità della luce emessa da una sorgente in moto rispetto all'osservatore risulti dalla somma vettoriale della velocità normale della luce e di quella della sorgente, se ne deduce l'esistenza di un effetto Doppler *di velocità* e in più di un effetto Doppler *di accelerazione* che può acquistare valori notevolmente superiori al primo, e che non è confermato dalle osservazioni. Un tale effetto era stato, per vero dire, già rilevato e sommariamente apprezzato da De Sitter[2], Thirring[3], Bernheimer[4]. Le nostre considerazioni, rimanendo nel campo strettamente cinematico ed eliminando il non necessario intervento di elementi ulteriori (quali tempo di coerenza, urti atomici, campo gravitazionale) rendono possibile la utilizzazione esclusiva di dati astronomici bene accertati.

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1926.
(2) « Bull. of Astr. Inst. of. Netherlands », vol. 2, 1924.
(3) « ZS. f. Phys. », vol. 31, p. 133, 1925.
(4) Ibidem, vol. 36, p. 302, 1926.

È facile riconoscere per via intuitiva l'origine di questo effetto di accelerazione.

Per quanto sia piccolo l'intervallo di tempo che corre fra le emissioni di due onde consecutive, la sorgente se è dotata di accelerazione subisce in quell'intervallo una variazione di velocità, cosicchè l'onda successiva è lanciata con velocità differente e, data la grande distanza fino all'osservatore, l'intervallo fra i tempi d'arrivo delle due onde risulta anche esso mutato in misura sensibile, donde un ulteriore mutamento di frequenza che si aggiunge all'effetto Doppler di velocità.

Ma tutto ciò presuppone che le onde consecutive di un fascio di luce emesso da un centro luminoso siano veramente emesse in modo consecutivo dal centro, e che ciascuna perciò risenta gli stati di moto consecutivi del centro luminoso.

Se il processo dell'emissione della luce si considera dal punto di vista delle teorie più recenti, le cose potrebbero però procedere diversamente.

Si resti pure, in un primo momento, nella concezione della propagazione della luce per onde.

Il fenomeno ritmico prenderebbe origine fuori del centro luminoso, e la frequenza delle onde generate sarebbe semplicemente il rapporto tra il mutamento di energia interna ΔE dell'atomo emittente e la costante h di Planck. Non si sa nulla sul meccanismo di formazione di queste onde che avrebbero una connessione energetica e non cinematica con lo stato del centro luminoso. E pertanto il treno di onde formatosi potrebbe bensì portare la traccia della velocità del centro luminoso, ma non quella dell'accelerazione.

Se poi si considera che la stessa propagazione della luce per onde è attualmente in questione, e che dei fatti nuovi di grande peso tenderebbero a rimettere in onore la concezione newtoniana di quanti granulari di luce, con che perfino la nozione di « frequenza » perderebbe il suo consueto e immediato significato fisico, risulta chiaramente che le considerazioni puramente cinematiche svolte in questa Nota non potrebbero esaurire la controversia. In tal caso, del resto, sarebbe da rifare l'intera opera monumentale di Huygens e di Fresnel, e già la spiegazione del più semplice fenomeno interferenziale, l'esperienza delle due fenditure di Young, presenterebbe delle difficoltà che oggi appaiono insuperabili.

1. — L'ipotesi balistica e alcune sue conseguenze cinematiche.

Poniamoci dal punto di vista della fisica classica, in modo che si possa parlare di direzioni invariabili e di assi fissi (rispetto alle stelle fisse; ovvero rispetto all'etere; o, se si vuole, nel senso della statistica stellare).

Sia

$$P = P(t) \tag{1}$$

un punto mobile con legge assegnata rispetto ad un generico osservatore (fisso) O, che si intenderà schematizzato da un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, di origine O e di direzioni invariabili.

La (1), proiettata sugli assi, dà luogo naturalmente alle tre equazioni scalari equivalenti, che definiscono, in funzione di t, le tre coordinate x, y, z di P; e in particolare alla espressione della distanza $r = \overline{OP}$, pure come funzione di t.

La velocità

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

(riferita agli stessi assi, cioè allo stesso osservatore) ha come componente radiale (nel senso delle r crescenti)

$$(2) \qquad v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r},$$

convenendo di designare per brevità con punti sovrapposti le derivate rispetto a t.

Ciò premesso, supponiamo che valga per la propagazione della luce (in assenza di ogni azione perturbatrice) l'*ipotesi balistica* del Ritz [1], la quale consiste in questo: La luce emessa da una sorgente (puntiforme) P si propaga in tutte le direzioni con velocità costante c *rispetto alla sorgente*, il che vuol dire più precisamente, rispetto ad assi di direzione invariabile coll'origine in un punto fittizio C, il quale coincide con P all'istante t dell'emissione, e successivamente si muove di moto rettilineo uniforme con la velocità $\boldsymbol{v}$ da cui era animato P nell'istante t. Naturalmente C coincide con P nel caso in cui il moto di quest'ultimo (rispetto al riferimento assoluto) sia uniforme, o in particolare si riduca alla quiete.

Se della propagazione luminosa ci si fa un modello ondulatorio, si potrà dire che le superficie d'onda sono sfere di centro C. Comunque, indicando con $\boldsymbol{u}$ il versore di una direzione generica, la velocità della luce in quella direzione sarà data (rispetto a C) da $c\boldsymbol{u}$.

Se, invece di C, si considera l'osservatore fisso O, varrà il principio di composizione delle velocità dell'ordinaria cinematica, e si avrà come velocità della luce, nella direzione $\boldsymbol{u}$, quale apparisce ad O, $c\boldsymbol{u}$ + velocità della sorgente rispetto ad O, ossia

$$(3) \qquad c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}.$$

Le eventuali superficie d'onda rimangono naturalmente sferiche anche per l'osservatore O, ma si tratta di sfere di centro C, le quali vanno espandendosi attorno a questo punto fittizio.

(1) *Gesammelte Werke* (Paris, Gautier-Villars, 1911), Art. XVIII.

Proponiamoci in particolare di desumere dalla (3) la velocità di propagazione V (in senso scalare) con cui viaggia la luce emessa, in un assegnato istante t, da P, lungo la retta PO, verso O. Il versore di tale raggio essendo manifestamente $-\frac{P-O}{r}$, dovremo porre

$$-V\frac{P-O}{r} = c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \tag{4}$$

che determina ad un tempo il versore $\boldsymbol{u}$ e lo scalare V.

Il divario fra l'incognito versore $\boldsymbol{u}$ (direzione secondo cui la luce viene emessa da P) e $-\frac{P-O}{r}$ (direzione secondo cui essa viene percepita da O) costituisce un *effetto di aberrazione*, particolare dell'ipotesi balistica, che non sembra però suscettibile di controllo sperimentale da parte di O. Ben diverso è il caso della modificazione nella velocità di propagazione, la quale da c, come seguiterebbe ad essere nello schema classico, diviene V. Interessa perciò essenzialmente di ricavare V dalla (4), il che si ottiene subito eliminando $\boldsymbol{u}$.

Consideriamo dapprima un caso particolare ovvio, ma notevole perchè il divario di V da c, che gli compete, costituisce in ogni eventualità il termine preponderante di $V - c$. Si tratta del caso in cui (all'istante considerato t) la velocità $\boldsymbol{v}$ di P sia tutta radiale (nell'uno o nell'altro senso).

La (4) mostra allora che avendo i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $P - O$ la medesima direzione (se non il medesimo verso) lo stesso accade di $\boldsymbol{u}$ e si ha, eguagliando le componenti radiali (verso O) e badando alla (2),

$$V = c - \dot{r}. \tag{5}$$

Passiamo oramai al caso generale, ed isoliamo $c\boldsymbol{u}$ nella (4), eguagliando poi le lunghezze dei vettori che appariscono nei due membri.

Qualora si noti che

$$\boldsymbol{v} \times \frac{P-O}{r} = v_r = \dot{r},$$

e si designi con v il valore assoluto della velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$, risulta senz'altro

$$V^2 + 2V\dot{r} + v^2 = c^2,$$

che può essere scritta

$$(V + \dot{r})^2 = c^2 - v^2 + \dot{r}^2. \tag{6}$$

Riterremo, come è nella natura delle cose, la velocità v della sorgente, e a fortiori la sua componente radiale $\dot{r}$, piccola di fronte a c. Potremo

in conformità trattare negli apprezzamenti numerici come quantità del primo ordine i rapporti del tipo $\frac{\dot{r}}{c}$, nonchè

$$(7) \qquad \frac{v}{c} = \beta \quad , \quad \frac{\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}}{c} = \beta_1 ,$$

essendo in ogni caso $\beta_1 \leq \beta$.

La (6), trascurando β_1^2 di fronte all'unità, dà per V il valore (5) che rigorosamente gli compete, quando $\boldsymbol{v}(t)$ è puramente radiale. Il valore esatto, avuto riguardo all'espressione (7) di β_1, può essere scritto

$$(6') \qquad V = c\sqrt{1 - \beta_1^2} - \dot{r} .$$

Da

$$v^2 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$$

si trae, derivando,

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} = av ,$$

dove si designa con a la componente tangenziale (cioè secondo $\boldsymbol{v}$) dell'accelerazione $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ di P.

Con ciò l'espressione (7) di β_1 dà

$$\frac{d\beta_1^2}{dt} = \frac{2}{c^2}(va - \dot{r}\ddot{r}) ;$$

si ha quindi, per derivazione della (6'),

$$(8) \qquad \dot{V} = \left(\frac{\dot{r}}{c}\ddot{r} - \beta a\right)(1 - \beta_1^2)^{-1/2} - \ddot{r} .$$

Le (6') e (8) definiscono rigorosamente la velocità radiale V e la sua derivata $\dot{V}$.

Per lo scopo che abbiamo in vista, potremo tranquillamente trascurare di fronte all'unità non solo termini dell'ordine di β^2, ma anche termini dell'ordine di β. In conformità *adotteremo senz'altro per* V *il valore* c, *e per* $\dot{V}$ il valore

$$(9) \qquad \dot{V} = -\ddot{r} ,$$

che risulta da (8) notando che nel primo termine le componenti $\ddot{r}$ ed a dell'accelerazione sono affette dai fattori di primo ordine $\frac{\dot{r}}{c}$ e β.

2. — L'equazione di Doppler e la conseguente correlazione delle frequenze.

La luce emessa da P in un generico istante t si propaga lungo la retta PO verso O con velocità V [data rigorosamente dalla (8), e approssimativamente dalla (5), o addirittura da c].

Perciò essa impiega il tempo $\frac{r}{V}$ a giungere in O, e l'istante di arrivo t' rimane definito da

$$t' = t + \frac{r}{V} . \tag{10}$$

È questa la così detta *equazione di Doppler*, che lega i tempi di emissione coi tempi di arrivo. Differenziando, se ne trae la relazione

$$dt' = dt \left\{ 1 + \frac{\dot{r}}{V} - \frac{r\dot{V}}{V^2} \right\} \tag{11}$$

tra i rispettivi differenziali, relazione la quale può naturalmente applicarsi anche ad intervalli di tempo (corrispondenti) τ, τ' molto brevi, pur senza essere infinitesimi: tale il periodo τ delle vibrazioni luminose emesse dalla sorgente P, e il periodo τ' con cui vengono invece percepite da O.

Considerando, in luogo dei periodi, le frequenze

$$\nu = \frac{1}{\tau} \quad , \quad \nu' = \frac{1}{\tau'} ,$$

si ha dalla (11) la legge di correlazione

$$\nu = \nu' \left\{ 1 + \frac{\dot{r}}{V} - \frac{r\dot{V}}{V^2} \right\} , \tag{11'}$$

la quale costituisce l'*espressione rigorosa del principio di Doppler* nella forma che conviene all'ipotesi balistica.

Come si è osservato alla fine del numero precedente, si può porre con sufficiente approssimazione

$$V = c \quad , \quad \dot{V} = -\ddot{r}$$

e limitarsi ad illustrare le conseguenze della formula approssimata

$$\nu = \nu' \left\{ 1 + \frac{\dot{r}}{c} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right\} . \tag{12}$$

Notiamo intanto che il termine

$$\frac{\dot{r}}{c} = \delta \tag{13}$$

vi rappresenta quella parte dello spostamento (relativo) $\frac{\nu - \nu'}{\nu'}$ di frequenza che corrisponde all'ordinario effetto Doppler (V rigorosamente eguale a c, comunque si muova la sorgente); mentre la perturbazione dovuta all'ipotesi balistica è caratterizzata dall'ultimo termine

$$\frac{r\ddot{r}}{c^2} = \delta_1 . \tag{14}$$

3. — Caso in cui P descrive un'orbita circolare. Formula atta a controllo astronomico.

Supponiamo che P descriva di moto uniforme, un'orbita circolare attorno ad un punto G fisso rispetto all'osservatore O, e consideriamo, per comodità di calcolo, il caso in cui il piano dell'orbita passa per O.

Introduciamo in questo piano due assi coordinati Ox, Oy, facendo passare la direzione positiva dell'asse Oy per G. Indichiamo con d la distanza $\overline{OG}$, con a il raggio dell'orbita, e con ϑ l'anomalia di GP rispetto all'asse delle x. Avremo

$$x = a\cos\vartheta \quad , \quad y = d + a\sin\vartheta \tag{15}$$

e (senza pregiudizio della generalità)

$$\vartheta = \omega t \tag{16}$$

con ω costante positiva.

Dalle (15) segue manifestamente

$$r^2 = x^2 + y^2 = d^2 + a^2 + 2\,d\,a\cos\vartheta , \tag{17}$$

e quindi

$$\dot{r} = \omega\, a\,\frac{d}{r}\cos\vartheta \quad , \quad \ddot{r} = -\omega^2\, a\,\frac{d}{r}\sin\vartheta - \frac{\dot{r}^2}{r} . \tag{18}$$

Qualora si esemplifichi la sorgente luminosa P come una stella doppia che descrive un'orbita circolare attorno al baricentro G del sistema binario (costituito da essa e dalla sua compagna), e O come un osservatore terrestre,

$$\frac{2a}{d} = \varepsilon \tag{19}$$

costituisce l'*angolo parallattico*, che può ben riguardarsi trascurabile di fronte all'unità. Con tale intesa, avendosi dalle (17)

$$\frac{d}{r} = \left\{ 1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \varepsilon\cos\vartheta \right\}^{-\frac{1}{2}} ,$$

$\frac{d}{r}$ è, in prima approssimazione, sostituibile coll'unità.

Cerchiamo di renderci conto dell'importanza relativa dei due spostamenti δ (effetto Doppler normale) e δ_1 (correzione balistica), calcolandone (nella suaccennata ipotesi semplificatrice) i massimi valori assoluti Δ e Δ_1.

Dalla (13) e dalla prima delle (18) si ha senz'altro (in quanto va posto $\frac{d}{r} = 1$)

$$\Delta = \frac{\omega a}{c},$$

mentre la seconda può essere scritta

$$\ddot{r} = -\omega^2 a \sin\vartheta - \frac{\omega^2 a^2}{d}\cos^2\vartheta = -\omega^2 a\left\{\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos^2\vartheta\right\}.$$

Trascurando ancora una volta la parallasse ε di fronte all'unità, si può identificare $\frac{r\ddot{r}}{c^2}$ con $\frac{d\ddot{r}}{c^2}$ e se ne deduce, in base alla (14), come massimo valore di δ_1,

$$\Delta_1 = \frac{\omega^2 a d}{c^2} = \Delta\frac{\omega d}{c}.$$

Se si nota che $\frac{d}{c}$ rappresenta il tempo T_1 impiegato dalla luce a percorrere la distanza media Stella doppia-Terra e che fra la velocità angolare ω e il periodo T del moto circolare (durata della rivoluzione della stella doppia di cui si tratta) passa la relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

si ha in definitiva

$$\Delta_1 = \Delta\, 2\pi\frac{T_1}{T}. \tag{20}$$

La correzione balistica può dunque ammontare a

$$2\pi\frac{T_1}{T}$$

volte il massimo Δ *dell'effetto Doppler normale,* essendo T_1 il tempo impiegato dalla luce per giungere a noi dalla stella e T la durata della sua rivoluzione.

La formula (20) è stata dedotta nell'ipotesi che l'osservatore O appartenga al piano dell'orbita della sorgente luminosa. È facile però riconoscere che la (20) seguita a sussistere qualunque sia l'orbita circolare di P. Per constatarlo, immaginiamo ancora di assumere OG come direzione positiva

dell'asse y, e, se OG non è addirittura perpendicolare al piano dell'orbita, consideriamone le proiezione Gy_1 su questo piano, indicando con φ l'angolo (acuto) $\widehat{yy_1}$. Nel caso particolare in cui OG e il piano dell'orbita fossero perpendicolari, assumeremo Gy_1 ad arbitrio nel detto piano, e sarà $\varphi = \widehat{yy_1} = \frac{\pi}{2}$. Comunque, potremo ulteriormente assumere l'asse Ox nella direzione perpendicolare ad un tempo ad y e ad y_1 (e quindi parallela al piano dell'orbita), e con ciò rimane individuato anche il terzo asse cartesiano Oz. Scegliendo i versi in modo opportuno, si hanno per le coordinate di P, al posto delle (15), le espressioni

$$(15') \qquad x = a\cos\vartheta \quad , \quad y = d + a\sin\vartheta\cos\varphi \quad , \quad z = a\sin\vartheta\sin\varphi \, ,$$

essendo sempre $\vartheta = \omega t$. Se ne trae

$$(17') \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2 + 2\,d\,a\cos\varphi\cos\vartheta \, ,$$

e quindi

$$(18') \qquad \dot{r} = \omega a\cos\varphi\frac{d}{r}\cos\vartheta \quad , \quad \ddot{r} = -\omega^2 a\cos\varphi\frac{d}{r}\sin\vartheta - \frac{\dot{r}^2}{r} \, .$$

Da questo punto in poi tutto va come nel caso particolare in cui il piano dell'orbita passa per O, tranne che la costante a si trova sostituita da $a\cos\varphi$. Ne risultano (sempre trascurando l'angolo parallattico ε) come massimi valori assoluti di δ e di δ_1:

$$\Delta = \frac{\omega a\cos\varphi}{c} \quad , \quad \Delta_1 = \frac{\omega^2 a\cos\varphi}{c^2} = \Delta\frac{\omega d}{c} \, ,$$

donde ancora la (20), coll'avvertenza che, nel caso particolare di $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (moto in piano perpendicolare ad OG), si annullano insieme Δ e Δ_1, e quindi essa si riduce ad una identità. Del resto in tale caso la sorgente rimane sempre alla stessa distanza dall'osservatore; in base alle (6'), (7) e alla costanza della velocità v di P, anche V è rigorosamente costante: non c'è quindi nè effetto Doppler normale, nè correzione balistica.

Escluso questo caso limite, ritenuto cioè $\varphi < \frac{\pi}{2}$, la (20) può servire di effettivo controllo all'ipotesi balistica.

Già per una stella doppia *visuale*, quale Procione, si ha $\frac{T_1}{T} = \frac{1}{4}$ e quindi Δ_1 è più che $\frac{3}{2}\Delta$.

Per doppie spettroscopiche il rapporto $\frac{T_1}{T}$ può assumere valori di gran lunga più rilevanti. Ci basti citare l'esempio della stella polare, la quale pos-

siede una compagna (spettroscopica) scoperta da Campbell. Il periodo di rivoluzione è un po' meno di quattro giorni, mentre il relativo T_1 supera i 46 anni. Ne viene che Δ_1 dovrebbe essere oltre 25000 volte Δ!

L'esperienza non ha mai fatto sospettare spostamenti spettrali così enormi, sicchè l'ipotesi balistica è insostenibile o almeno non conciliabile cogli ordinari postulati della fisica classica.

Matematica. — *Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione.* Nota del Socio Corrisp. Leonida Tonelli[1].

Sia Q il rettangolo del piano (x, y), definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, dove supponiamo $0 \leq a < b \leq 1$, $0 \leq c < d \leq 1$; sia poi $f(x, y)$ una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) in Q. Consideriamo l'espressione

$$(1) \quad \pi_n(x, y) = \frac{k_n^2}{4} \iint_Q f(u, v) [1 - (u - x)^2]^n [1 - (v - y)^2]^n \, du \, dv,$$

con $1 : k_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt$. Il polinomio scritto è detto *il polinomio di Stieltjes* della funzione $f(x, y)$; di esso (posto però in forma leggermente diversa) mi occupai in una Memoria: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*[2]. Rammenterò che, se E è un insieme chiuso di punti *interni* a Q, e se i suoi punti sono tutti di continuità per la $f(x, y)$, il polinomio (1), per $n \to \infty$, tende uniformemente, su tutto E, verso la $f(x, y)$. Si ha, inoltre, che $\pi_n(x, y)$ converge, quasi dappertutto in Q, verso $f(x, y)$.

Nella presente Nota, mi propongo di stabilire alcune proprietà di $\pi_n(x, y)$, *nell'ipotesi che la* $f(x, y)$, *oltre che continua, sia, in* Q, *assolutamente continua,* secondo la definizione di *assoluta continuità* da me posta nella Nota: *Sulla quadratura delle superficie*[3]. Più precisamente, dimostrerò che, *nell'ipotesi indicata*:

(1) Presentata nella seduta del 16 maggio 1926.

(2) « Rendiconti Circ. Matem. », Palermo, to. XXIX (1910). Vedi anche De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, to. II (2me édit., 1912), p. 133.

(3) Nota III, questi « Rendiconti » (1926, p. 633). Dico che la $f(x, y)$ è *assolutamente continua* in Q, se, per quasi tutti gli $\bar{x}$ di (a, b) e per quasi tutti gli $\bar{y}$ di (c, d),

A) *le derivate parziali del 1° ordine di* $\pi_n(x,y)$; $p_n(x,y)$ e $q_n(x,y)$, *tendono quasi dappertutto in* Q, *per* $n \to \infty$, *verso le corrispondenti derivate* $p(x,y)$ e $q(x,y)$ *della* $f(x,y)$;

B) *in ogni rettangolo* R, *completamente interno a* Q, *gli integrali* $\int_a^x \int_c^y |p_n|\,dx\,dy$ e $\int_a^x \int_c^y |q_n|\,dx\,dy$, *per* $n = 1, 2, \cdots$, *sono tutti delle funzioni equidoppiamente assolutamente continue* (1);

C) *l'area* $S_n(R)$ *della parte di superficie* $z = \pi_n(x,y)$ *che corrisponde al rettangolo* R *(completamente interno a* Q*), tende, per* $n \to \infty$, *all'area* S (R) *della parte corrispondente della superficie* $z = f(x,y)$.

Osserviamo che l'ipotesi qui posta per la $f(x,y)$ esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'area della superficie $z = f(x,y)$ sia data dall'integrale di $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$.

1. Dimostriamo la proposizione A). Abbiamo

$$p_n(x,y) = -\frac{k_n^2}{4} \iint_Q f(u,v)\, D_u [1 - (u-x)^2]^n [1 - (v-y)^2]^n \, du\,dv;$$

e se indichiamo con R_ε il rettangolo

$$[a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon \quad , \quad c + \varepsilon \leq y \leq d - \varepsilon] \, (\varepsilon > 0),$$

e (x,y) è un punto qualsiasi di R_ε, ragionando come nel n. 19 della Memoria già citata, vediamo che la differenza fra $p_n(x,y)$ e

$$(2) \qquad -\frac{k_n^2}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+\tau)\, D_t (1-t^2)^n (1-\tau^2)^n \, dt\,d\tau$$

tende a zero, per $n \to \infty$. L'espressione ora scritta diventa, con un'integrazione per parti (tenendo presente l'assoluta continuità della $f(x,y)$)

$$-\frac{k_n^2}{4} (1-\varepsilon^2)^n \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{ f(x+\varepsilon, y+\tau) - f(x-\varepsilon, y+\tau) \} (1-\tau^2)^n \, d\tau$$

$$+\frac{k_n^2}{4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p(x+t, y+\tau) (1-t^2)^n (1-\tau^2)^n \, dt\,d\tau \ (2).$$

le $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono funzioni assolutamente continue, rispettivamente della y in (c,d) e della x in (a,b), e se, inoltre, la variazione totale $V_{(y)}(\bar{x})$ della $f(\bar{x}, y)$, come funzione della sola y in (c,d), e quella $V_{(x)}(\bar{y})$ della $f(x, \bar{y})$, come funzione della sola x in (a,b), sono funzioni integrabili, rispettivamente della $\bar{x}$ in (a,b) e della $\bar{y}$ in (c,d).

(1) La *doppia assoluta continuità* è l'assoluta continuità nel senso del Vitali.

(2) Si rammenti che, per essere la $f(x,y)$ assolutamente continua in Q, essa è anche a variazione limitata (secondo la definizione da me posta nelle Note: *Sulla quadratura delle superficie*) in tale rettangolo, e perciò le derivate $p(x,y)$ e $q(x,y)$ sono superficialmente integrabili in Q.

Se indichiamo con M il massimo modulo della $f(x, y)$ in Q, il primo dei due termini scritti è, in modulo, minore di

$$k_n M (1 - \varepsilon^2)^n < 2 (n + 1) M (1 - \varepsilon^2)^n$$

(perchè $k_n < 2 (n + 1)$). Esso dunque tende a zero per $n \to \infty$. Il secondo termine, invece, differisce da

$$\frac{k_n^2}{4} \iint_Q p (u, v) [1 - (u - x)^2]^n [1 - (v - y)^2]^n \, du \, dv$$

per un'espressione tendente allo zero per $n \to \infty$. Ma questo integrale è l'integrale di Stieltjes relativo alla $p(x, y)$ e tende perciò, per $n \to \infty$. verso $p(x, y)$, quasi dappertutto in Q. Dunque possiamo concludere che, quasi dappertutto in R_ε e quindi in Q (ε essendo arbitrario), è $p_n(x, y) \to p(x, y)$. Altrettanto può dirsi per la $q_n(x, y)$.

2. Passiamo ora alla proposizione B). Dobbiamo dimostrare che se R è un rettangolo a lati paralleli agli assi x e y, *interno* a Q, gli integrali $\int_a^x \int_c^y |p_n| \, dx \, dy$, $(n = 1, 2, \cdots)$, sono equidoppiamente assolutamente continui in R, vale a dire, che, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è possibile di determinare un $\sigma > 0$ tale che, per ogni gruppo $R_1, R_2, \cdots, R_m$ di rettangoli di R, non sovrapponentisi, a lati paralleli agli assi x e y, e di area complessiva $\Omega < \sigma$, sia, per tutti gli n,

$$\Delta = \sum_{s=1}^{m} \iint_{R_s} |p_n| \, dx \, dy < \eta. \tag{3}$$

Sia $R \equiv [a_1 \leq x \leq b_1, c_1 \leq y \leq d_1]$, con $a < a_1 < b_1 < b$, $c < c_1 < d_1 < d$. Considerato uno qualunque dei gruppi indicati di rettangoli $R_1, R_2, \cdots, R_m$, l'area complessiva Ω sarà data da $\Omega = \int_{c_1}^{d_1} \sum \{\beta_r (y) - \alpha_r (y)\} \, dy$, intendendo che, per ogni $\bar{y}$ di (c_1, d_1), la sommatoria sia estesa a tutti gli intervalli $(\alpha_r (\bar{y}) \ , \ \beta_r (\bar{y}))$ staccati dai rettangoli $R_1, R_2, \cdots, R_m$ sulla retta $y = \bar{y}$. Rappresentando con $V_n (x, y)$ la variazione totale di $\pi_n (x, y)$, considerato come funzione della sola x, nell'intervallo (a, x), potremo scrivere

$$\Delta = \int_{c_1}^{d_1} \sum \{V_n [\beta_r (y), y] - V_n [\alpha_r (y), y]\} \, dy. \tag{4}$$

Osserviamo qui che indicando, per ogni y fisso di (c, d), con $P_n (x, y)$ il polinomio di Stieltjes della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x, e cioè posto

$$P_n (x, y) = \frac{k_n}{2} \int_a^b f (u, y) [1 - (u - x)^2]^n \, du, \tag{5}$$

abbiamo

$$\pi_n(x,y) = \frac{k_n}{2}\int_c^d P_n(x,v)\,[1-(v-y)^2]^n\,dv.$$

Perciò, se (α,β) è un qualunque intervallo di (a_1,b_1), possiamo scrivere

$$(6)\quad |\pi_n(\beta,y)-\pi_n(\alpha,y)| \leq \frac{k_n}{2}\int_c^d |P_n(\beta,v)-P_n(\alpha,v)|\,[1-(v-y)]^{2n}\,dv.$$

Ma per il polinomio (5) abbiamo, prendendo un ε positivo minore di tutte le differenze a_1-a , $b-b_1$, c_1-c , $d-d_1$, e ripetendo un calcolo fatto altrove (1)

$$|P_n(\beta,v)-P_n(\alpha,v)| < k_n M (1-\varepsilon^2)^n (\beta-\alpha)$$
$$+\frac{k_n}{2}\int_{a-\alpha}^{b-\beta}|f(\beta+t,v)-f(\alpha+t,v)|\,(1-t^2)^n\,dt,$$

dove M è ancora il massimo modulo della $f(x,y)$ in Q. Ponendo, per ogni y di (c,d), $f(x,y)=f(a,y)$ per $x<a$ e $f(x,y)=f(b,y)$ per $x>b$, abbiamo anche

$$|P_n(\beta,v)-P_n(\alpha,v)| < k_n M (1-\varepsilon^2)^n (\beta-\alpha)$$
$$+\frac{k_n}{2}\int_{a-b_1}^{b-a_1}|f(\beta+t,v)-f(\alpha+t,v)|\,(1-t^2)^n\,dt,$$

donde, sostituendo in (6) $\left(k_n<2(n+1), \int_c^d [1-(v-y)^2]^n\,dv < 2:k_n\right)$,

$$|\pi_n(\beta,y)-\pi_n(\alpha,y)| \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(\beta-\alpha)$$
$$+\frac{k_n^2}{4}\int_c^d [1-(v-y)^2]^n\,dv\int_{a-b_1}^{b-a_1}|f(\beta+t,v)-f(\alpha+t,v)|\,(1-t^2)^n\,dt.$$

Se consideriamo un intervallo (α',β') di (a_1,b_1) e lo decomponiamo in un numero finito di intervalli (α,β), otteniamo allora

$$\sum|\pi_n(\beta,y)-\pi_n(\alpha,y)| \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(\beta'-\alpha')$$
$$+\frac{k_n^2}{4}\int_c^d [1-(v-y)^2]^n\,dv\int_{a-b_1}^{b-a_1}\sum|f(\beta+t,v)-f(\alpha+t,v)|\,(1-t^2)^n\,dt,$$

intendendo che le somme che qui figurano siano estese a tutti gli intervalli (α,β) di (α',β'). A fortiori otteniamo anche, indicando con $V(x,y)$

(1) *Sopra alcuni polinomi approssimativi*, n. 9 («Annali di Matematica», to. XXV, 1916).

la variazione totale della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x, nell'intervallo $(-1, x)$,

$$\sum |\pi_n(\beta, y) - \pi_n(\alpha, y)| \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(\beta' - \alpha')$$

$$+ \frac{k_n^2}{4} \int_c^d [1-(v-y)^2]^n \, dv \int_{a-b_1}^{b-a_1} \{V(\beta'+t, v) - V(\alpha'+t, v)\}(1-t^2)^n \, dt;$$

e perciò, essendo la decomposizione di (α', β') negli intervalli (α, β) del tutto arbitraria, anche $V_n(\beta', y) - V_n(\alpha', y)$ risulta $\leq$ del secondo membro della disuguaglianza ora scritta. Questo risultato permette di dedurre dalla (4) la

$$(7) \qquad \Delta \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n \Omega +$$

$$+ \frac{k_n^2}{4} \int_{c_1}^{d_1} dy \int_c^d [1-(v-y)^2]^n \, dv \int_{a-b_1}^{b-a_1} \sum \{V(\beta_r(y)+t, v) - V(\alpha_r(y)+t, v)\}(1-t^2)^n \, dt$$

Sia ora μ un numero positivo arbitrario e determiniamo un $\lambda > 0$ e $< \mu$, in modo che, in ogni pseudointervallo E di (c, d), di misura $\leq \lambda$, sia $\int_E V(2, y)\, dy = \int_E V(b, y)\, dy < \mu$. Preso poi un $\delta > 0$, indichiamo con I lo pseudointervallo dei valori di y di (c, d) per i quali vale la

$$\sum \{V(\beta_r, y) - V(\alpha_r, y)\} < \mu,$$

qualunque sia il sistema $\{(\alpha_r, \beta_r)\}$ di intervalli non sovrapponentisi di $(-1, 2)$, tali che $\sum(\beta_r - \alpha_r) < \delta$. Siccome la $f(x, y)$, come funzione della sola x, è (per costruzione) costante fuori dell'intervallo (a, b), e in (a, b) è assolutamente continua per quasi tutti gli y di (c, d), la $V(x, y)$, come funzione della sola x risulta anch'essa assolutamente continua in $(-1, 2)$, per quasi tutti gli y di (c, d). Perciò la misura dello pseudointervallo I tende a $d - c$, per $\delta \to 0$. Possiamo dunque supporre δ tale che la misura del complementare J di I, rispetto a (c, d), sia $< \lambda$. Con ciò sarà $\int_J V(2, y)\, dy < \mu$. Fatto questo, scegliamo un numero positivo σ minore di $\lambda\delta$ ed anche di μ, e supponiamo che sia $\Omega < \sigma$. Allora, chiamando G lo pseudointervallo dei punti di (c_1, d_1) nei quali è $\sum \{\beta_r(y) - \alpha_r(y)\} \geq \delta$, abbiamo $\Omega \geq \delta\, m(G)$, e perciò $m(G) < \sigma : \delta < \lambda$.

Ritornando alla (7), osserviamo che il secondo termine del suo secondo membro è minore di

$$\mu + \frac{k_n}{2} \int_G dy \int_c^d V(2, v)[1-(v-y)^2]^n \, dv +$$

$$+ \frac{k_n}{2} \int_{c_1}^{d_1} dy \int_J V(2, v)[1-(v-y)^2]^n \, dv,$$

la quale espressione, ripetendo un calcolo fatto nei numeri 1 e 7 della mia Memoria citata per ultima, e tenendo conto di quanto sopra si è detto, è minore di

$$\mu + \mu(n+1)(1-\varepsilon^2)^n \left\{ \int_c^d V(2,v)\,dv + 1 \right\}$$
$$+ \frac{k_n}{2} \int_G dy \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V(2, y+t)(1-t^2)^n\,dt +$$
$$+ \frac{k_n}{2} \int_{c_1}^{d_1} dy \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V'(2, y+t)(1-t^2)^n\,dt,$$

dove abbiamo posto $V'(2,y) = V(2,y)$ nei punti di J e $V'(2,y) = 0$ altrove. Gli ultimi due termini di questa somma possono scriversi, invertendo le integrazioni,

$$\frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n \left\{ \int_G V(2, y+t)\,dy + \int_{c_1}^{d_1} V'(2, y+t)\,dy \right\} dt,$$

la quale espressione, per essere $m(G) < \lambda$ e

$$\int_{c_1}^{d_1} V'(2, y+t)\,dy \leq \int_J V(2,y)\,dy < \mu$$

e tenendo conto del modo con cui è stato scelto λ, è minore di 2μ. Dunque dalla (7) deduciamo, se è $\Omega < \sigma\ (< \mu)$,

$$\Delta < 3\mu + \mu(n+1)(1-\varepsilon^2)^n \left\{ 2M + 1 + \int_c^d V(2,v)\,dv \right\}.$$

Siccome μ è arbitrario, la (3) risulta provata.

3. Veniamo, infine, alla proposizione C). Osserviamo, innanzi tutto, che l'integrale di $\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}$, esteso ad un rettangolo qualunque di Q, non supera mai quello della somma $1 + |p_n| + |q_n|$. Perciò, dalla proposizione B) segue immediatamente che, in ogni rettangolo R interno a Q, gli integrali $\int_a^x \int_c^y \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}\,dx\,dy$, $(n = 1, 2, \cdots)$, sono equidoppiamente assolutamente continui. E siccome, per $n \to \infty$, è

$$\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} \to \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

in quasi tutto Q, in virtù del teorema A), ne viene, per il noto teorema di integrazione per serie del Vitali,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}\,dx\,dy = \iint_R \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Di qui segue [1] $\lim_{n\to\infty} S_n(R) = S(R)$.

(1) Vedi la mia Nota *Sulla quadratura delle superficie*, Nota III.

Chimica. — *Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti.* Nota del Socio G. Bruni e A. Ferrari.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *I due cicli sessuati di « Cryptochilum echini » Maupas si svolgono con due categorie d'individui, che si dividono e si rinnovano con modalità diverse.* Nota del Corrisp. A. Russo [1].

Dalle Note [2], pubblicate finora in questi « Rendiconti », risulta che nei due cicli sessuati, che compie *Cryptochilum*, il *principale* e l'*accessorio*, prendono parte due categorie d'individui, i cui micronuclei si dividono con modalità diverse ed hanno la sostanza nucleare, che in una categoria è la metà di quella dell'altra.

Tale diversità chiaramente si osserva nei due Gameti puri, che compiono la coniugazione principale, uno dei quali, che ha il micronucleo di forma globoide, riferibile ad 1, ho denominato *Gamete* A, mentre l'altro, che ha il micronucleo con forma di virgola e la sostanza nucleare, ridotta ad $^1/_2$, ho chiamato *Gamete* B.

I micronuclei di tali gameti, già durante la coniugazione principale, che essi compiono, si comportano diversamente; difatti, il micronucleo globuliforme del gamete A, durante tale processo, si divide per mitosi, formando un *filamento siderofilo*, interposto fra i nuclei figli, mentre quello virgoliforme del gamete B si divide atipicamente, in quanto che la sostanza nucleare, in un primo momento, si conforma in fili, disposti parallelamente tra loro, che si ripartiscono in due fasci contigui, che poi si allontanano, per formare due nuclei fusiformi, non riuniti da filamento siderofilo.

Oltre a tali particolarità, che riguardano il processo divisorio, è da osservare che il micronucleo globuliforme del gamete A, durante la *coniugazione principale*, si divide più rapidamente [3] del micronucleo virgoliforme del gamete B, per cui il primo compie tre divisioni mitotiche, nello stesso tempo che il secondo compie soltanto due divisioni atipiche.

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1926.

(2) « Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXXIII, 1° sem., ser. V, 1924; ibid., 2° sem.; ibid., vol. I, 1° sem., 1925.

(3) Russo A., *Sul differente ritmo di divisione dei micronuclei durante la coniugazione vera in « Cryptochilum echini » Maupas.* « Rend. R. Accademia dei Lincei », vol. XXXIII, serie V, 1° sem., fasc. 7-8, 1924.

Altro rilievo, a mio giudizio, non privo d'interesse biologico, come ho esposto in una Nota precedente [1], si è che il micronucleo globuliforme del gamete A ha un predominio sul micronucleo virgoliforme del gamete B, in quanto che esso fornisce entrambi i micronuclei degli apparati nucleari degli *Individui misti*, che si costituiscono dagli exconiuganti, subito dopo la coniugazione principale, mentre il secondo fornisce solo alcuni macronuclei degli apparati stessi.

Nell'Individuo misto, che chiamo A, perchè proviene dal gamete A, il micronucleo dell'apparato nucleare è dato da uno dei quattro nuclei, formatisi, durante la coniugazione principale, dopo la 2ª mitosi del micronucleo globuliforme, e perciò ha il valore di $^1/_4$, mentre nell'Individuo misto B, formatosi dal gamete B, il micronucleo del suo apparato nucleare deriva da uno dei predetti quattro nuclei del gamete A, che, dopo essere migrato nel gamete B, compie quivi la 3ª mitosi. Il micronucleo dell'Individuo misto B sarà dunque $^1/_8$, pur derivando sempre dal micronucleo globuliforme del gamete A.

La metà del micronucleo virgoliforme del gamete B, calcolato $^1/_2$, migrando a sua volta nel gamete A, dove compie la 2ª divisione, fornisce due macronuclei dell'apparato nucleare, i quali perciò saranno $^1/_8$. Pertanto, nell'*Individuo misto* A, i quattro nuclei dell'apparato nucleare sono rappresentati da un micronucleo e da un macronucleo, che derivano dai nuclei proprii o *stazionarii*, che sono $^1/_4$, e da due macronuclei, derivati dal *nucleo migrato*, che sono $^1/_8$. Nell'*Individuo misto* B invece, un micronucleo ed un macronucleo, entrambi derivati dal *nucleo migrato* del gamete A, che compie la 3ª mitosi, sono rispettivamente $^1/_8$, e gli altri due macronuclei, forniti dal nucleo proprio o *stazionario* del gamete B, sono anche $^1/_8$.

Stabilitasi così la diversità quantitativa dei nuclei dell'apparato nucleare dei due Individui misti, da ciascuno di questi s'iniziano le due categorie d'Individui, una delle quali chiamo *Categoria* A, perchè deriva dall'*Individuo misto* A, l'altra chiamo invece *Categoria* B, perchè deriva dall'*Individuo misto* B.

Gl'individui, derivati dall'una o dall'altra categoria, sono rappresentati dai *Gametogeni* e dai *Gameti*, che, alla lor volta, si distinguono in *forme pure* ed in *forme impure*: si ha quindi una *Categoria* A ed una *Categoria* B di forme pure, ed una *Categoria* A ed una *Categoria* B di forme impure, entrambe derivate dalla divisione degli Individui misti A e B. Tale divisione, in ciascun Individuo misto, si compie con modalità diversa, in quanto che, nell'Individuo misto A, il micronucleo si divide per mitosi e forma fra i nuclei figli un filamento interposto siderofilo; nell'Individuo misto B, invece, esso si divide per amitosi, senza lasciare alcun residuo.

(1) Russo A., *Sulla diversa costituzione dei due Gameti puri in « Cryptochilum echini » Maupas, risultante dall'analisi delle successioni nucleari e sulla prevalenza del micronucleo globuliforme.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XXXIII, serie V, fasc. 7-8, 1924.

I due primi Individui, così formati, sono dei *Gametogeni*, di cui uno è *puro*, l'altro *impuro*, perchè nel primo i nuclei dell'apparato nucleare hanno la medesima origine dal micronucleo globuliforme, mentre nel secondo i nuclei sono di origine diversa, il micronucleo essendo derivato dal micronucleo globuliforme del *Gamete* A, i due macronuclei dal micronucleo virgoliforme del *Gamete* B.

Anche i *Gametogeni* si dividono con le stesse modalità, seguite dall'Individuo misto, da cui provengono: il *Gametogene puro* A, difatti, si divide per mitosi, quello B per amitosi, dando origine così ai *Gameti puri* A e B, con micronucleo globuliforme il primo, con micronucleo virgoliforme il secondo.

Il *Gametogene impuro* A e quello B compiono, invece, due successive divisioni, dando ciascuno 4 *Gameti impuri*. Il processo divisorio è il mitotico per il Gametogene impuro della *Categoria* A, l'amitotico per il Gametogene impuro della *Categoria* B; soltanto che, mentre, dopo la 1ª divisione, i micronuclei dei Gameti impuri sono di forma globoide, dopo la 2ª divisione, i micronuclei dei successivi Gameti impuri sono allungati, piriformi o spiniformi.

Le due Categorie d'individui si possono riassumere nel seguente quadro:

CATEGORIA *A*.

Individuo misto *A*

con micronucleo = $1/4$, che si divide per mitosi e con emissione di filamento siderofilo. Lo stesso processo si ripete in tutti gli individui della serie.

- Gametogene impuro A
  - 1° *Gamete impuro* A = 2° *Gamete impuro* A con micron. = $1/16$ = con micron. = $1/32$
  - 1° *Gamete impuro* A = 2° *Gamete impuro* A con micronucleo = $1/8$
- Gametogene puro A
  - *Gamete puro* A con micronucleo = $1/16$
  - *Gamete puro* A

CATEGORIA *B*.

Individuo misto *B*

con micronucleo = $1/8$, che si divide per amitosi, senza filamento siderofilo. Lo stesso processo si ripete in tutti gli individui della serie.

- Gametogene impuro B
  - 1° *Gamete impuro B* = 2° *Gamete impuro B* con micron. = $1/32$ = con micron. = $1/64$
  - 1° *Gamete impuro* B = 2° *Gamete impuro* B con micronucleo = $1/16$
- Gemetogene puro B
  - *Gamete puro* B con micronucleo = $1/32$
  - *Gamete puro* B

Il valore biologico delle due serie sopra elencate, che formano, in *Cryptochilum echini*, due distinte categorie d'individui, non è facile stabilire nel suo intimo significato. Per quanto riguarda gl'individui destinati ad accoppiarsi, per compiere l'atto della coniugazione, non è dubbio si tratti di Gameti e quindi di forme sessuali differenti. Specialmente nei *Gameti puri*, la differenza tra l'uno e l'altro è assai sensibile, manifestandosi, oltre che con la diversa quantità di sostanza nucleare, con il diverso processo divisorio, che compiono i micronuclei, e con la loro diversa celerità di dividersi. Sorge però la domanda quale dei due Gameti corrisponda all'uno e quale all'altro sesso, o meglio quale dei due possa riferirsi al sesso maschile e quale al femminile.

Su tale punto, l'indagine non potrebbe essere che teorica e quindi di analogia con quanto fu osservato da precedenti ricercatori, in riguardo ai caratteri ed alle particolari attitudini fisiologiche degli elementi maschili e femminili, sia negli stessi Protozoi sia nei Metazoi. Ma anche un'analisi così fatta, data l'incertezza dei risultati e la diversità, che talora si osserva fra le manifestazioni vitali dell'una e dell'altra categoria di cellule sessuali, darebbe risultati poco sicuri.

Lasciando ad altri il cómpito di tale ricerca, e volendo restare obbiettivamente nell'ámbito dei fatti osservati, per ora posso dire soltanto che in *Cryptochilum echini* esistono due categorie d'individui e due sorta di Gameti con caratteri diversi, quasi opposti, che si rinnovano sempre con gli stessi caratteri, nella successione dei due cicli, che caratterizzano tale Ciliato.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani* $\sum a_n z^n$ *ove* $a_n = g(n)$ *per* n *intero positivo con* $g(n)$ *trascendente intera.* Nota di Silvio Minetti, presentata[1] dal Socio S. Pincherle.

§ 1. – È noto che se $f(z)$ è funzione analitica regolare in $z = 0$ e se $\sum a_n z^n$ è il suo sviluppo in serie di potenze di z, in un intorno di questo punto, vi sono infinite funzioni intere $g(z)$ che per ogni valore intero positivo n di z acquistano il valore a_n. Tali sono per esempio le

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(n)}{n^{z+1}}\,dn + e^{Q(z)} \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

(1) Nella seduta del 16 maggio 1926.

l'integrale essendo esteso al contorno di un campo semplicemente connesso in cui $f(z)$ è regolare e contenente $n = 0$ nel suo interno, e $Q(z)$ una funzione intera.

Io dimostro che se fra queste trascendenti intere ve ne è una di genere $k = 0$ ed ordine [1] $\rho = 1$ e se la condizione

$$r_{i+1} > (1 + \eta) r_i$$

è soddisfatta per una infinità di valori dell'indice i, η essendo una quantità positiva comunque piccola ma « fissata *a priori* », il raggio di convergenza della $f(z)$ è l'unità, mentre in una prossima Nota mi riservo dimostrare altresì che il punto $z = 1$ è certamente un punto singolare di essa.

La presente Nota estende dunque le ricerche che il Leau ebbe occasione di fare per il caso di $\rho < 1$, al caso di $\rho = 1$, così come più precisamente stiamo per dichiarare.

§ 2. - Invero nel caso di una $g(z)$ di genere $k = 0$ ma di ordine $\rho < 1$, il Teorema che qui dimostro è già noto ed è anzi valido senz'altra ipotesi restrittiva circa i valori dei moduli dei posti-zero della $g(z)$ che si considera, come risulta da un enunciato del Leau [2]. Si sa anzi in tal caso di più e che cioè non solo il raggio di convergenza R della $f(z)$ è l'unità, ma che inoltre $z = 1$ è il solo punto singolare di essa in tutto il piano; ma è d'altra parte ben noto che nel caso invece di ordine ρ intero e quindi in particolare di $\rho = 1$, si incontrano gravissime difficoltà di cui se non altro sono sintomi indubbi sia il fatto che in genere nella Teoria delle Funzioni intere, la quasi totalità dei risultati sin qui ottenuti si riferiscono ad ordine non intero, sia il fatto che solo per un ordine intero si presenta il ben noto caso di eccezione del Picard.

Varii autori hanno del resto in più occasioni esplicitamente segnalato tali difficoltà; segnatamente, fra essi, mi basti qui citare il Lindelöf [3].

(1) Nel senso di Borel; vedi la Memoria di quell'Autore sulle funzioni intere, negli « Acta Mathematica », to. XX, e le *Leçons sur les fonctions entières* del medesimo Autore, 1900, p. 26, nota (1).

(2) *Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor*, « Journal de Mathématiques », 5me série, t. V, 1899.

(3) Vedi E. Lindelöf, *Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions entières*, « Comptes Rendus », to. CXXXIII, 2° sem., 1901, p. 1280 ove si esprime così:

« L'origine des difficultés qu'on rencontre dans le cas où ρ est un nombre entier « est mise en évidence par les formules asymptotiques que la théorie de Cauchy nous a « fournies pour certains produits infinis, et que nous appliquerons ici à quelques exemples « très particuliers ».

D'altra parte dal nostro attuale punto di vista e cioè della determinazione del raggio di convergenza della $f(z)$ nelle circostanze in cui stiamo trattando, notiamo che la conclusione che in particolare discende dai risultati ottenuti dal Leau e che cioè il raggio

§ 3. – Indicheremo qui (senza tema ormai di ambiguità) con

(1) $f(z) = \sum a_n z^n$ la funzione analitica che si considera

(2) $a_n = g(n)$ il coefficiente generale dello sviluppo che figura nel secondo membro della (1), $g(z)$ essendo una funzione trascendente intera di z, di genere $k = 0$ ed ordine $\rho = 1$

(3) a_i il posto-zero generico della $g(z)$

(4) $r_i = |a_i|$ il modulo di a_i

(5) $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \left| \sqrt[n]{a_n} \right|}$ il raggio di convergenza della $f(z)$

rimandando il lettore, per una più esatta comprensione dei principali passaggi che seguono, ai classici risultati del Poincaré e Borel esposti nelle già citate « Leçons sur les Fonctions Entières » del Borel, e avvertendo che ove non si nuoceva alla chiarezza dell'esposizione si sono adottati, per comodità del lettore stesso, i medesimi simboli adoperati nel volume citato.

In particolare mi preme qui far rilevare come gli α_i che compaiono nella dimostrazione sono quelli di Poincaré [1].

Si può intanto scrivere successivamente

$$(6)\quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| g(n)^{\frac{1}{n}} \right| = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \left[e^{\beta_0} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \right| = [2]$$

$$= \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| e^{\frac{\beta_0}{n}} \left[\prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \right| =$$

$$= \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \left[e^{\alpha_n} \prod_1^m e^{-\alpha_i n} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \prod_{m+1}^\infty e^{-\alpha_i n} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \right| =$$

$$= e^{\alpha - \sum_1^m \alpha_i} \left[\overline{\lim_{n \to \infty}} \prod_1^m \left| 1 - \frac{n}{a_i} \right|^{\frac{1}{n}} \right] \left[\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \left[\prod_{m+1}^\infty e^{-\alpha_i n} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right] \right|^{\frac{1}{n}} \right].$$

Mostreremo ora come sotto le poste ipotesi, è

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = 1.$$

di convergenza R della $f(z)$ è l'unità se la $g(z)$ è di genere zero ma di ordine $\rho < 1$, si può far discendere facilmente da quello che il Borel chiama « secondo teorema di Hadamard », vedi BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, 1900, p. 76.

(1) BOREL, loc. cit., p. 49.

(2) Perchè se $g(n)$ è di genere zero sarà della forma $e^{\beta_0} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{a_i}\right)$, β_0 essendo una costante.

Si noti che a tal uopo basta dimostrare che, scelto ε positivo qualunque, si può sempre determinare:

1° un valore di n (in generale dipendente da ε) tale che a partire da esso l'espressione $\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ è certamente inferiore ad $(1+\varepsilon)$;

2° una successione di valori di n tendenti all'∞ e per cui la medesima espressione, $\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$, è costantemente maggiore di $(1-\varepsilon)$.

Per la prima parte osserviamo intanto che

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\left[\prod_1^m\left(1-\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right| = \left|\prod_1^m \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right| = {}^{(1)}$$

$$= \left|\prod_1^m \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_i-n}\right)\right| \overset{(2)}{=} 1$$

e che in conseguenza si potrà sempre determinare un valore di n sufficientemente grande perchè a partire da esso si abbia

$$\left|\left[\prod_1^m\left(1-\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right| \leqq (1\pm\vartheta) \tag{7}$$

con ϑ positivo qualunque.

Si osservi poi che il prodotto infinito

$$\prod_{m+1}^{\infty} e^{-\alpha_i n}\left(1-\frac{n}{a_i}\right) = R_m$$

è in valore assoluto costantemente minore dell'unità [3] e che in conseguenza per qualunque valore di n si avrà

$$\left|\prod_{m+1}^{\infty} e^{-\alpha_i n}\left(1-\frac{n}{a_i}\right)\right|^{\frac{1}{n}} \leqq 1. \tag{8}$$

Le (6), (7), (8) ci autorizzano dunque a concludere che da un certo valore di n in poi sarà

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < e^{\alpha-\sum_1^m \alpha_i}(1\pm\vartheta)(1-\sigma)$$

(1) Ciò perchè i due segni lim e $||$ sono fra loro permutabili; perchè il prodotto $\prod_1^m$ si compone di un numero finito di fattori e infine perchè se esiste il lim nel senso ordinario della parola, il $\overline{\lim}$ coincide necessariamente con esso.

(2) Questo passaggio resta giustificato poi dalla ben nota proprietà

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

vera nel caso in cui esiste il secondo membro di essa.

(3) Vedi Borel, loc. cit., p. 50.

con $0 \leq \sigma < 1$; e siccome la (8) è soddisfatta per un certo valore di m e per tutti i valori superiori ad esso, m essendo indipendente da n; e siccome si ha [1] $\sum_{1}^{\infty} \alpha_i = \alpha$ è chiaro che si potrà sempre determinare un valore di n a partire da cui si abbia costantemente

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| < 1 + \varepsilon$$

ε positivo qualunque ma « fissato *a priori* ».

La prima parte resta così completamente dimostrata.

Per la seconda notiamo che la diseguaglianza evidente

$$\left| \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{a_i}\right) \right| = \prod_{m+1}^{\infty} \left| 1 - \frac{n}{a_i} \right| \geq \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{|a_i|}\right)$$

e l'osservazione che la eguaglianza

$$\lim_{n \to \infty} \left[\prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{r_i}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{n+1}{r_i}\right)}{\prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{r_i}\right)} = \lim_{n \to \infty} \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r_i - n}\right)$$

vale evidentemente anche se la n percorre una speciale successione di valori tendenti all'∞, purchè esista il secondo membro, ci conducono a stabilire che per dimostrare il nostro assunto basta verificare come possa scegliersi una certa successione di valori dell'indice n, tendente all'∞, e tale che n percorrendo essa si abbia

$$\text{(A)} \qquad \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r_i - n}\right) > 1 - \sigma$$

con σ positivo qualunque e « fissato *a priori* ».

Cominciamo a tal uopo col dimostrare che il prodotto infinito

$$\prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r_i - n}\right)$$

è assolutamente convergente qualunque sia il valore di n appartenente alla detta successione e in ogni caso tale che sia $n \neq r_i$.

Basta a tal uopo dimostrare la convergenza della

$$\text{(9)} \qquad \sum \frac{1}{|r_i - n|}$$

per ogni $n \neq r_i$ e appartenente alla successione in parola.

(1) Vedi sempre Borel, loc. cit., p. 49.

Notiamo intanto che si ha la seguente identità

$$(10)^{(1)} \qquad \sum \frac{1}{r_i - n} = \sum \left[\left(\frac{1}{r_i - n} - \frac{1}{r_i} \right) + \frac{1}{r_i} \right] =$$

$$= \sum \left[\frac{n}{r_i (r_i - n)} + \frac{1}{r_i} \right] = \sum \frac{n}{r_i (r_i - n)} + \sum \frac{1}{r_i}$$

e che quindi essendo la $\sum \frac{1}{r_i}$ convergente per ipotesi, lo sarà per ogni valore di $n \neq r_i$ anche la $\sum \frac{1}{r_i - n}$.

Cerchiamo ora se può determinarsi n in modo che sia in ogni caso, ma sempre per $n \neq r_i$

$$\frac{n}{r_i (r_i - n)} + \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_i} \left(\frac{n}{r_i - n} + 1 \right) < \frac{M + 1}{r_i}$$

con M positivo e per ora qualunque.

È sufficiente che sia

$$(11) \qquad \left| \frac{n}{r_i - n} \right| < M \qquad .$$

ed allora la (9) sarà proprio convergente come si desiderava.

Si distinguano a tale scopo gli r_i maggiori di n da quelli minori di n .

Se $r_i > n$ la (11) è soddisfatta se

$$n < M r_i - M n$$

cioè se

$$(1 + M) n < M r_i$$

o

$$n < \frac{M}{1 + M} r_i \, .$$

Posto $\frac{M}{1 + M} = (1 - \varepsilon)$ dovrà essere

$$(12) \qquad n < (1 - \varepsilon) r_i$$

Se invece $r_i < n$ si giunge invece, con analoghe considerazioni alla condizione

$$(13) \qquad n > (1 + \sigma) r_i$$

se $(1 + \sigma) = \frac{M}{M - 1}$.

(1) Alla cortesia del chiarissimo prof. Vitali debbo l'indicazione dei passaggi che vanno dalla (10) alla (15) che dopo accurato esame della Nota volle cortesemente suggerirmi e che compaiono qui salvo rettifica e piccola modifica apportatavi dallo scrivente. Mi è grato porgergliene qui il mio più vivo affettuoso ringraziamento.

Perchè poi n sia compreso effettivamente fra due r_i consecutivi, p. es. fra r_i ed r_{i-1} e distinto da essi basterà evidentemente in forza delle (12) e (13) che sia soddisfatta la

$$\frac{M}{1+M} r_{i+1} > \frac{M}{M-1} r_i$$

che dà

$$r_{i+1} > \frac{M+1}{M-1} r_i$$

cioè

$$r_{i+1} > (1+\eta) r_i \tag{14}$$

se $\eta = \dfrac{M+1}{M-1}$.

Perchè poi i valori di n determinati in base alle condizioni precedenti possano essere interi occorre che sia

$$\frac{M}{M+1} r_{i+1} - \frac{M}{M-1} r_i > 1 \tag{15}$$

mentre per la (14) deve essere

$$r_{i+1} > (1+\eta) r_i \qquad \text{con} \qquad 1+\eta = \frac{M+1}{M-1}.$$

Posto allora

$$r_{i+1} = \sigma_i (1+\eta) r_i$$

la (15) sarà soddisfatta se

$$\left[\frac{\sigma_i (1+\eta)}{M+1} - \frac{1}{M-1}\right] r_i > \frac{1}{M}$$

se cioè

$$\left[\frac{\sigma_i}{M-1} - \frac{1}{M-1}\right] r_i > \frac{1}{M}$$

o,

$$(\sigma_i - 1) r_i > \frac{M-1}{M}$$

che sarà evidentemente soddisfatta se

$$(\sigma_i - 1) r_i > 1$$

se cioè

$$\sigma_i > 1 + \chi$$

dove $\chi = \frac{1}{r_i}$. Fissato allora un certo η_1 si determini dapprima M dalla

$$1 + \eta = \frac{M + 1}{M - 1}$$

che dà $M = \frac{1 + \eta_1}{\eta_1}$; si fissi poi φ positivo comunque piccolo.

Se esiste allora una successione infinita di valori dell'indice i tali che per essi sia soddisfatta la

$$r_{i-1} > (1 - \varphi)(1 - \eta_1) r_i$$

allora essendo

$$r_{i-1} = \sigma_i (1 - \eta_1) r_i$$

sarà per ogni valore di i appartenente a detta successione

$$\sigma_i > 1 + \varphi$$

e φ essendo fisso, la $\sigma_i > 1 + \chi$, cioè la

$$\sigma_i > 1 + \frac{1}{r_i}$$

resterà certamente soddisfatta a partire da un certo valore sufficientemente grande di i perchè $\lim_{i \to \infty} \frac{1}{r_i} = 0$.

La (15) sarà dunque verificata per i sufficientemente grande e appartenente alla successione anzidetta mentre la (14) resterà pure, per tali infiniti valori di i, contemporaneamente verificata per ipotesi. Ma η_1 e φ essendo solo assoggettati alla condizione di essere positivi sì, ma arbitrari, ne consegue che si potrà sempre scrivere

$$(1 - \varphi)(1 - \eta_1) = 1 - \eta_2$$

con η_2 positivo qualunque ma «fissato *a priori*».

Si puo dunque determinare una successione di infiniti valori positivi interi di n, tendenti all'infinito, per cui tutte le serie

$$\sum \frac{1}{r_i - n}$$

siano convergenti ed abbiano ciascun loro rispettivo termine di posto i minore del corrispondente termine della serie $\sum \frac{M}{r_i}$ $\left(\text{convergente perchè lo è } \sum \frac{1}{r_i}\right)$ cioè di $\frac{M}{r_i}$.

Il prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{r_i - n}\right)$$

è dunque per la successione di valori di n di cui si è testè accertata l'esistenza, sempre assolutamente convergente.

Posto allora in generale

$$-\frac{1}{r_i - n} = v_i$$

in virtù della diseguaglianza evidente

$$|(1 - v_\xi)(1 - v_{\xi+1})(1 - v_{\xi+2}) \cdots - 1| <$$
$$< (1 + v_\xi)(1 + v_{\xi+1})(1 + v_{\xi+2}) \cdots - 1$$

e quindi della

$$(16) \qquad |(1 - v_\xi)(1 - v_{\xi+1})(1 - v_{\xi+2}) \cdots - 1| < e^{\sum_{i=\xi}^{i=\infty} v_i} - 1$$

ed in virtù della provata convergenza della (9) (per ogni valore di n appartenente alla successione delle n di cui se ne è accertata l'esistenza) è agevole asserire che si potrà sempre determinare un conveniente valore di ξ per cui $\sum_{i=\xi}^{i=\infty} v_i$ sia inferiore a $\log(1 + \theta)$, θ essendo positivo qualunque, piccolo a piacere, e « fissato *a priori* ».

Il secondo membro della (16) potrà dunque esser reso minore di qualunque numero positivo θ dato e la (A) resterà quindi certamente soddisfatta, per la successione determinata delle n, e per un conveniente valore, sufficientemente grande di $(m + 1)$.

Le considerazioni sin qui svolte, tenuta per di più presente la (7), (che vale per un numero finito, sia pur comunque grande di fattori che figurano nel Π della formula stessa) ci assicurano dunque la validità anche della seconda parte che ci rimaneva da dimostrare.

Si può dunque intanto enunciare il seguente:

« Teorema. — Se $f(z)$ è funzione analitica regolare in $z = 0$ e se « $\sum a_n z^n$ è il suo sviluppo in serie di potenze di z in un intorno di questo « punto, il coefficiente generale a_n essendo il valore che per n intero e po- « sitivo assume una funzione intera $g(n)$ di genere $k = 0$ ed ordine $\rho = 1$ « e se per una infinità di valori dell'indice i è soddisfatta la condizione

$$r_{i-1} > (1 + \gamma_i) r_i$$

« γ_i essendo una quantità comunque piccola ma « fissata *a priori* » il raggio R « di convergenza della $f(z) = \sum a_n z^n$ è l'unità ».

Matematica. — *Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano.* Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Lo scopo di questa nota è di dimostrare il teorema seguente: *Abbiasi una serie di Taylor*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{1}$$

con un raggio di convergenza differente da zero: si supponga che questa serie determini una funzione analitica $F(z)$, *olomorfa in tutti i punti* z *interni all'angolo*

$$\lambda < \arg z < 2\pi - \lambda \tag{2}$$

Si supponga inoltre che esista un numero reale α *tale che l'espressione* $z^{-\alpha} F(z)$ *rimanga limitata quando* z *tende verso l'infinito rimanendo nell'angolo* (2).

In queste condizioni esiste una funzione analitica $\varphi(s)$ *della variabile* $s \equiv \sigma + it$, *che soddisfa alle condizioni seguenti:*

1° $\varphi(s)$ *è regolare nel semipiano* $\sigma > \alpha$, *e l'espressione* $\frac{1}{|s|} \log |\varphi(s)|$ *ha un limite superiore finito in ogni semipiano* $\sigma \geqq \beta > \alpha$.

2° *Su ogni retta* $\sigma = \beta > \alpha$ *e qualunque sia il numero positivo* ε *si ha*

$$|\varphi(\beta + it)| < e^{(\lambda+\varepsilon)\cdot|t|}$$

non appena $|t|$ *sorpassi un certo limite* T *(che può dipendere da* β*).*

3° *Si ha*

$$\varphi(n) = c_n$$

per tutti i valori interi di n *superiori ad* α.

2. Supponiamo che α sia superiore a -1 e che esso non sia un numero intero; denotiamo con n il numero intero immediatamente superiore ad α e poniamo

$$F_n(z) = F(z) - [c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}].$$

L'integrale

$$I(s) = e^{i\psi} \int_0^\infty F_n(re^{i\psi}) \cdot (re^{i\psi})^{-s-1}\, dr \quad (\lambda < \psi < 2\pi - \lambda)$$

(1) Nella seduta del 16 maggio 1926.

sarà allora assolutamente convergente per tutti i valori di s la cui parte reale è compresa tra α ed n; esso è manifestamente indipendente dal valore di ψ. Denotiamo con ρ un numero inferiore al raggio di convergenza della serie (1). Possiamo allora scrivere

$$I(s) = -\int_{\rho}^{\infty} F_n(-z)\cdot(-z)^{-s-1}\,dz + \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \int_0^{\rho} (-z)^{\nu-s-1}\,d(-z) =$$

$$= -\int_{\rho}^{\infty} F_n(-z)\cdot(-z)^{-s-1}\,dz + \sum_{\nu=n}^{\infty} c\,\frac{(-\rho)^{\nu-s}}{\nu-s}.$$

In questa espressione l'integrale converge assolutamente per tutti i valori di s, la cui parte reale è superiore ad α. Ne segue che la funzione di $s \equiv \sigma + it$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} I(s)\cdot \operatorname{sen}\pi s$$

è olomorfa in tutto il semipiano $\sigma > \alpha$. È inoltre evidente che, se m è un intero qualunque superiore ad α, $\varphi(m)$ è uguale a c_m.

Sia β un numero arbitrario superiore ad α; diamo ad s un valore fisso $s_0 = \sigma_0 + it_0$ tale che $\sigma_0 \geqq \beta$. Esistono tutt'al più due numeri interi ν tali che $|\nu - s| < 1$. Siccome nel cerchio $|s-m| \leqq 1$ si ha

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\pi s}{s-n}\right| \leqq \operatorname{Sh}\pi,$$

possiamo scrivere

$$(3)\qquad \left|\operatorname{sen}\pi s_0 \cdot \sum_{|\nu - s_0|<1} \frac{c_\nu(-\rho)^\nu}{\nu - s_0}\right| \leqq \operatorname{Sh}\pi \cdot \sum' |c_\nu \rho^\nu| = A.$$

Inoltre

$$(4)\qquad \left|\sum_{\substack{|\nu - s_0| \geqq 1 \\ \nu > \alpha}} \frac{c_\nu(-\rho)^\nu}{\nu - s_0}\right| < \sum |c_\nu \rho^\nu| = B.$$

Infine, se $\rho < 1$,

$$(5)\qquad \left|\int_{\rho}^{\infty} F_n(-z)\cdot(-z)^{-s_0-1}\,dz\right| \leqq \int_1^{\infty} |F_n(-z)|\, z^{-\beta-1}\,dz + \int_{\rho}^{1} |F_n(-z)|\, z^{-\sigma_0-1}\,dz.$$

$$(6)\qquad \int_{\rho}^{1} |F_n(-z)|\cdot z^{-\sigma_0-1}\,dz < C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\sigma_0} < C e^{k|s_0|}.$$

Nel caso $\rho \geqq 1$ basterà sopprimere in (5) l'ultimo integrale.

Le disuguaglianze (3), (4) e (6) ci mostrano che in tutto il semipiano $\sigma > \beta$ si ha

$$\varphi(s) \leqq A\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left\{B\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\sigma} + \int_1^{\infty} |F(-z)\, z^{-\beta-1}\,dz + C e^{k s}\right\} \operatorname{sen}\pi s < L e^{k|s|}.$$

La funzione $\varphi(s)$ soddisfa dunque alle condizioni 1° e 3° del teorema. Rimane a dimostrare che essa soddisfa alla condizione 2°.

3. Sia adesso β un numero compreso tra α ed n. Poniamo

$$\begin{cases} u = \log r \\ v = \psi - \pi \end{cases} \qquad F_n(re^{i\psi}) \cdot (re^{i\psi})^{-\beta} = A(u + iv).$$

$A(w)$ sarà una funzione di $w = u + iv$, olomorfa nella striscia $|v| < \pi - \lambda$; inoltre esisterà un numero positivo γ, tale che si abbia

$$|A(w)| < e^{-\gamma|w|}$$

non appena $|w|$ sorpassi un certo limite fisso.

Ricordiamo ora la formola

$$(7) \qquad f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut\,i}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)\, e^{-t\zeta i}\,d\zeta \ (1).$$

Diamo a v un valore fisso e poniamo in (7)

$$f(u) = A(u + iv_0).$$

Potremo farlo purchè si abbia $|v_0| < \pi - \lambda$. La formola (7) prenderà allora la forma

$$(8) \qquad A(u + iv_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut\,i}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta + iv_0)\, e^{-t\zeta i}\,d\zeta.$$

Orbene, secondo il teorema fondamentale di *Cauchy*

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta + iv_0)\, e^{-t\zeta i}\,d\zeta = e^{-tv_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta)\, e^{-t\zeta i}\,d\zeta.$$

Poi

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta)\, e^{-t\zeta i}\,d\zeta = \int_{0}^{+\infty} F_n(-r) \cdot (-r)^{-\beta - ti - 1}\,d(-r) = I(\beta + ti).$$

Le (8), (9) e (10) ci danno

$$A(u + iv_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ui + v_0)t}\, I(\beta + ti)\,dt$$

e in questa formola l'integrale sarà certamente convergente per tutti i valori

(1) V. p. es. KRONECKER, *Vorlesungen über die Theorie der Integrale*, p. 83.

positivi di u, purchè si abbia $|v_0| < \pi - \lambda$. Se ne deduce che per i valori sufficientemente grandi di $|t|$ si ha

$$|I(\beta + it)| < e^{(\lambda - \pi + \varepsilon)\cdot|t|}$$

e per conseguenza

$$|\varphi(\beta + it)| < e^{(\lambda + \varepsilon)\cdot|t|}.$$

La funzione $\varphi(s)$ soddisfa dunque alla condizione 2° del teorema per i valori di β compresi tra α ed n.

Orbene, *se una funzione che soddisfa alla condizione 1° verifica la condizione 2° per un valore determinato β_0 di β, essa la verifica anche per tutti i valori di β superiori a β_0*. Infatti, secondo un teorema di Phragmen-Lindelöf [1], si può affermare che per una tale funzione l'espressione

$$h(\psi) = \lim_{r \to \infty} \sup. \frac{\log |\varphi(\beta_0 + r e^{i\psi})|}{r}$$

è una funzione continua di ψ nell'intervallo $|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$. Siccome $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \leqq \lambda$, si può trovare un angolo γ tale che si abbia

$$h(\psi) < \lambda + \varepsilon \quad \text{per} \quad \gamma \leqq |\psi| \leqq \frac{\pi}{2},$$

e ciò qualunque piccolo sia il numero positivo ε. Secondo un altro teorema di Phragmen-Lindelöf [2], esisterà allora un numero ρ_0 tale che si abbia

$$|\varphi(\beta_0 + \rho e^{i\psi})| < e^{(\lambda + \varepsilon)\rho} \quad \text{per} \quad \rho > \rho_0$$

uniformemente rispetto a ψ in ambedue gli angoli $\gamma \leqq |\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$. Ciò mostra che la funzione $\varphi(s)$ soddisfa alla condizione 2° per tutti i valori di β superiori a β_0.

Il teorema enunciato al n. 1 è così pienamente dimostrato.

4. Questo teorema è l'inverso del teorema seguente:

Sia $\varphi(s)$ una funzione che soddisfa alle condizioni 1° e 2° [3] del n. 1. La serie di Taylor

$$\sum_0^\infty \varphi(n) z^n$$

(1) PHRAGMEN-LINDELÖF, *Sur l'extension d'un principe classique de l'analyse* (« Acta Math. », t. XXXI).

(2) Loc. cit.

(3) Le condizioni 1° e 2° si suppongono essere verificate anche sulla retta $\sigma = \alpha$; supporremo inoltre che $\alpha > -1$.

determina allora una funzione di z, *la quale è olomorfa nell'angolo* (2) *e può essere rappresentata in ogni angolo interno all'angolo* (2) *dall'espressione*

$$z^{\alpha} \cdot \varepsilon(z)$$

ove $\varepsilon(z)$ *tende verso zero quando* $|z|$ *cresce indefinitamente.*

Questo teorema fu dimostrato sotto una forma meno generale dal sig. Le Roy e poi generalizzato dal sig. Lindelöf. La forma data da quest'ultimo differisce da quella sopra enunciata in ciò che alla funzione $\varphi(s)$ si impone la condizione

$$|\varphi(\alpha + \rho e^{i\psi})| < e^{(\lambda+\varepsilon)\rho} \quad \text{per} \quad \rho > \rho_0 \ , \ |\psi| \leqq \frac{\pi}{2} ,$$

la quale è un po' meno larga di quelle date qui. Però la dimostrazione data dal sig. Lindelöf si applica quasi senza modifiche al teorema più generale sopra enunciato.

Infatti, come abbiamo visto alla fine del n. 3, si può trovare un angolo γ tale che si abbia

$$|\varphi(\alpha + \rho e^{i\psi})| < e^{\lambda'\rho} \quad \text{per} \quad \rho > \rho_0 \ , \ \lambda' > \lambda$$

in ambedue gli angoli $\gamma \leqq |\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$.

Ciò posto, riprendiamo la dimostrazione del teorema di Le Roy data nelle pagine 109-116 del *Calcul des résidus* di Lindelöf. A p. 111 si sceglierà l'angolo ψ_0 in modo che si abbia

$$\pi \sin \psi_0 = \vartheta' \quad , \quad \psi_0 > \gamma ,$$

ove $\lambda' < \vartheta' < \pi$. Poi, si sceglierà il numero r_0 in modo che si abbia

$$\log \frac{1}{r_0} \cos \psi_0 = H + \vartheta' - \lambda$$

ove

$$H = \max_{|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}} \left\{ \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |\varphi(\alpha + \rho e^{i\psi})|}{\rho} \right\} .$$

Il resto della dimostrazione rimane quello dato dal sig. Lindelöf.

5. Il fatto che il teorema di Le Roy generalizzato può essere invertito, presenta qualche interesse. Esso mostra che il teorema di Le Roy non si applica soltanto, come si poteva credere, a delle funzioni molto particolari, ma si applica invece ad una classe abbastanza larga di funzioni.

Matematica. — *Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici.* Nota di O. Zariski, presentata dal Socio F. Enriques.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo

Matematica. — *Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica.* Nota di H. Levy, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Les paramètres locaux dans une variété de Riemann.* Nota di Hlavatý, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les fonctions définies par des séries de Dirilichlet.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla legge di Mayevski per la precessione balistica.* Nota di Filippo Burzio, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Ci riferiamo alla Nota precedente intitolata *Alcune nuove proprietà della precessione balistica*, di cui conserviamo tutte le notazioni. Richiamandoci al comportamento sperimentale della funzione: $Q = \frac{AKv^3}{g \cos \theta}$, indicato nella Nota stessa, vogliamo – *nell'ipotesi che, a partire da un certo punto,* Q *possa, lungo archi più o meno ampi, ritenersi costante in un valor medio; e nell'altra ipotesi che siano trascurabili i termini in* δ^1 – dimostrare la seguente proprietà: *mentre fino al vertice della traiettoria vale il comportamento balistico caratteristico segnalato dal Mayevski, cioè l'angolo* ψ *di precessione si*

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

mantiene inferiore a π, *a partire dal punto di velocità minima* ψ *può crescere oltre* π, *cioè il proietto può comportarsi come una trottola* (1).

Nel dimostrare questa proprietà, che limita la legge di Mayevski ($\psi < \pi$) al tratto prima del vertice, daremo insieme, della legge suddetta, una dimostrazione la quale si sottrae alle obbiezioni che possono muoversi alla dimostrazione originaria del Mayevski stesso, cui si accennò nella Nota citata (2).

Riprendiamo l'equazione (4):

$$\boxed{(4)}\quad \delta = \frac{1}{\mathfrak{Q}(\psi_i, \psi)}\left[\operatorname{sen}\psi \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\psi - 2\,\mathfrak{Q}(\psi_i, \psi)\,\delta_i \operatorname{sen}\psi_i + \mathfrak{Q}^2(\psi_i, \psi)\,\delta_i^2}\right].$$

Essa vale, come si vide, entro intervalli (ψ_i, ψ) in cui $\cos\psi$ non si annulli: assumeremo come istanti di divisione degl'intervalli quelli ove ψ ha il valore $\pm\frac{\pi}{2}$ e quelli ove ψ arriva, partendo da $\pm\frac{\pi}{2}$ e *variando sempre nello stesso senso*, e in cui poi da crescente (o decrescente) diviene decrescente (o crescente). Poniamo per brevità:

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2\psi - 2\,\mathfrak{Q}(\psi_i, \psi)\,\delta_i \operatorname{sen}\psi_i + \mathfrak{Q}^2(\psi_i, \psi)\,\delta_i^2} = \mathrm{B}.$$

Lemma. — *Se l'intervallo* (ψ_i, ψ) *è prima del vertice, e se ivi* ψ *è crescente, si deve, in* (4), *prendere il segno* $+$ *davanti a* B.

Infatti, si osservi che prima del vertice Q è decrescente. Quindi: $1 > \frac{Q(\psi)}{\mathfrak{Q}(\psi_i, \psi)}$. Poichè, per la 1ª delle (1), è: $\psi' = -\theta'\left(Q - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\delta}\right)$, e: $-\theta' > 0$, mentre per ipotesi ψ cresce, si ha: $Q > \frac{\operatorname{sen}\psi}{\delta}$; cioè, per la (4): $Q > \mathfrak{Q}(\psi_i, \psi)\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\psi \pm \mathrm{B}}$, e quindi: $1 > \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\psi \pm \mathrm{B}}$. Dunque vale il segno $+$.

Valori iniziali. — Si ha, per $t = 0$: $\psi_0 = 0$; $\delta_0 = 0$; $\psi_0' = \frac{AF_0}{2}$; $\delta_0' = -\theta_0'$ (3). Essendo ψ_0' e δ_0' positivi, ψ e δ crescono inizialmente.

(1) Noi dimostriamo solo che, oltre quel punto, cadono le condizioni che impongono: $\psi < \pi$. Un esempio numerico, citato al termine di questa Nota, ci ha mostrato che il caso $\psi > \pi$ può effettivamente verificarsi. Esso risulta d'altronde, anche dalla teoria geometrica del De Sparre.

(2) Precisamente, la nostra dimostrazione è più rigorosa nella 1ª parte, e più generale nella 2ª, il Mayevski limitandosi a considerare alcuni intervalli successivi, senza stabilire formole ricorrenti, come le (8) e (9). Si rammenti poi che è questa legge, assai importante, a spiegare la derivazione *a sinistra* dei proietti usuali, registrata dalle tavole di tiro, e corretta con l'operazione dello *scostamento*.

(3) Cfr. il teorema dimostrato nella Nota citata.

Primo intervallo di variazione di ψ. — Si ha dalla (4) (almeno prima del vertice):

$$\boxed{(5)} \qquad \delta = \frac{2 \operatorname{sen} \psi}{\mathfrak{Q}(o, \psi)}.$$

Se ψ cresce sempre senza raggiungere $\frac{\pi}{2}$, la legge di Mayevski ($\psi < \pi$) è verificata. Se ψ crescesse fino a un valore $\psi^* < \frac{\pi}{2}$ e poi ritornasse indietro [1], poichè in quest'intervallo δ è crescente ($\delta' = -\theta' \cos \psi$), si vede dalla (5) che ψ non potrebbe tornare a o. Dunque ψ, o rimane compreso fra o e $\frac{\pi}{2}$, o raggiunge e oltrepassa $\frac{\pi}{2}$. Consideriamo quest'ultimo caso.

Valori per $\psi = \frac{\pi}{2}$. — Si ha:

$$\boxed{(5')} \qquad \delta\left(\frac{\pi}{2}\right)_o = \frac{2}{\mathfrak{Q}\left(o, \frac{\pi}{2}\right)} \quad ; \quad \delta'\left(\frac{\pi}{2}\right)_o = o;$$

essendo i primi membri i valori di δ, δ' per $\psi = \frac{\pi}{2}$, e affettando dell'indice o per indicare che ψ raggiunge per la prima volta $\frac{\pi}{2}$.

Primo intervallo da $\psi = \frac{\pi}{2}$ in avanti. — Si ha:

$$\boxed{(6)} \qquad \delta = \frac{1}{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)} \left[\operatorname{sen} \psi + \sqrt{\left(1 - 2 \frac{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)}{\mathfrak{Q}\left(o, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^2 - \cos^2 \psi} \right].$$

Poichè Q è funzione decrescente, la quantità fra ( ) è minore di 1, e ψ non può pertanto raggiungere il valore π, perchè altrimenti il radicale non sarebbe reale. Dunque, o, *prima del vertice*, ψ cresce sempre non raggiungendo π, *e il teorema è dimostrato*, oppure si ferma a un valore $\psi_1 < \pi$ per poi retrocedere. Nel punto $\psi = \psi_1$ si ha: $\psi' = o$. Si noti che questa dimostrazione non si applica al caso che *l'intervallo si prolunghi oltre il*

(1) dovrebbe, in quel punto, essere: $\psi^{*\prime} = o$, donde: $\delta^* = \frac{\operatorname{sen} \psi^*}{Q(\psi^*)}$; e, per la (5): $\frac{Q(\psi^*)}{\mathfrak{Q}(o, \psi^*)} = \frac{1}{2}$. La possibilità di questo caso dipende dunque dalla legge di variazione di Q.

punto di velocità minima; in tal caso Q tornerebbe a crescere, e non è più detto che la quantità tra ( ) rimanga minore di 1, cioè che, per la realtà di δ, debba essere: $\psi < \pi$.

VALORI NEL PUNTO: $\psi = \psi_1$. — Poichè ivi: $\psi' = -\theta'\left[Q - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\delta}\right] = 0$, si ha:

$$\delta(\psi_1) = \frac{\operatorname{sen}\psi_1}{Q(\psi_1)} \quad (6')$$ (1).

INTERVALLO SUCCESSIVO A: $\psi = \psi_1$. — In questo intervallo, per ipotesi, ψ *comincia* col decrescere, e decresce anche δ, poichè: $\delta' = -\theta' \cos\psi < 0$. Si ha:

$$\delta = \frac{1}{\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)}\left[\operatorname{sen}\psi \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\psi - \operatorname{sen}^2\psi_1 \frac{\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)}{Q(\psi_1)}\left(2 - \frac{\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)}{Q(\psi_1)}\right)}\right]. \quad (7)$$

Osserviamo che, nel secondo membro di (7): $\frac{1}{\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)}$ è crescente; $\operatorname{sen}\psi$ *comincia* coll'essere crescente; il radicando *comincia* coll'essere crescente (poichè da $\operatorname{sen}\psi$ crescente si sottrae una quantità positiva con derivata negativa (2)): poichè, d'altronde, δ decresce $\left(\text{fino a che } \psi > \frac{\pi}{2}\right)$ si vede come, *se siamo prima del vertice*, occorra in (7) cominciare col prendere il segno — davanti al radicale; per continuità si prenderà poi questo segno in tutto l'intervallo, se il radicale non si annulli, come proveremo. È ora facile dedurne, che, *prima del vertice*, ψ *non può che decrescere in tutto l'intervallo*. Infatti, per la (7), è:

$$\psi' = -\theta'\left[Q - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\delta}\right] = -\theta'\left[Q - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\psi - B}\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)\right].$$

Poichè Q prima del vertice è decrescente, si ha: $Q(\psi) < \mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)$; d'altronde, per quanto si è detto sopra, B (che è 0 per $\psi = \psi_1$) *comincia* coll'essere crescente (ψ cominciando, per ipotesi, coll'essere decrescente): dunque il secondo fattore dell'espressione di ψ' ora scritta, e quindi ψ' stessa, *continua* ad essere negativa; cioè ψ *continua* a decrescere. Ma allora B continua a crescere (e non può annullarsi); e così via. Concludendo: o questo intervallo non finisce prima del vertice, e quindi ψ si mantiene descrescente

(1) Il M., con la sua analisi approssimata, trova: $\delta(\psi_1) = \frac{\operatorname{sen}\psi_1}{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi_1\right)}$.

(2) Questa derivata vale: $2\operatorname{sen}^2\psi_1 \frac{\mathfrak{Q}'_\psi(\psi_1, \psi)}{Q(\psi_1)}\left[1 - \frac{\mathfrak{Q}(\psi_1, \psi)}{Q(\psi_1)}\right]$, dove $\mathfrak{Q}'_\psi(\psi_1, \psi) < 0$

da ψ_1 in poi senza nemmeno raggiungere $\frac{\pi}{2}$ e la legge di Mayevski è dimostrata: oppure l'intervallo finisce quando ψ è di nuovo tornato a $\frac{\pi}{2}$. Consideriamo quest'ultimo caso.

VALORI PER $\psi = \frac{\pi}{2}$. — Si ha:

$$(7') \qquad \delta\left(\frac{\pi}{2}\right)_1 = \frac{1}{\mathcal{Q}\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)}\left[1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\psi_1 \frac{\mathcal{Q}\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)}{Q(\psi_1)}\left(2 - \frac{\mathcal{Q}\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right)}{Q(\psi_1)}\right)}\right].$$

Da questo punto in poi le formule esatte relative ai successivi intervalli assumono una complessità crescente.

* * *

Teniamo conto della circostanza (sperimentale, e risultante anche dalla espressione di Q discussa nella Nota I) che, trascorso il periodo iniziale, Q varia poco, perchè tende ad un minimo poco oltre il vertice. Se, in considerazione di ciò, poniamo in (7'): $\mathcal{Q}\left(\psi_1, \frac{\pi}{2}\right) = Q(\psi_1)$, si ha:

$$(7'') \qquad \delta\left(\frac{\pi}{2}\right)_1 = \frac{1 - \cos\psi_1}{Q(\psi_1)}.$$

Estendiamo ora, e con maggior ragione (dato che saremo più vicini al vertice) lo stesso criterio semplificativo approssimato agli intervalli successivi. Potremo dimostrare il seguente teorema:

Se ψ *varia in un intervallo prima del vertice da* $\frac{\pi}{2}$ *a* ψ_r $(0 < \psi_r < \pi)$ *per poi ritornare a* $\frac{\pi}{2}$, *allora non possono darsi che questi tre casi:* 1° *o* ψ *continuerà a variare in uno stesso senso senza raggiungere nè* 0 *nè* π, *e la legge di Mayevski è dimostrata;* 2° *oppure da* $\frac{\pi}{2}$ *andrà a un valore* ψ_{r+1} $(0 < \psi_{r+1} < \pi)$ *per poi tornare indietro senza raggiungere più* $\frac{\pi}{2}$, e anche in questo caso la legge di Mayevski è dimostrata; 3° *oppure raggiungerà* $\frac{\pi}{2}$: e allora basterà applicare questo teorema stesso all'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \psi_{r+1}, \frac{\pi}{2}\right)$ per ottenere un nuovo limite ψ_{r+2} $(0 < \psi_{r+2} < \pi)$ e così via: e la legge di Mayevski sarà dimostrata in generale.

Dimostrazione. — Supponiamo che si abbia (come abbiamo già trovato per $r = 0$ e $r = 1$):

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta(\psi_r) = \dfrac{\operatorname{sen}\psi_r}{Q(\psi_r)} \\ \delta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)_r = \dfrac{1 \pm \cos\psi_r}{Q(\psi_r)}; \end{cases}$$

allora si ricava (per gli istanti successivi a quello in cui ψ ha raggiunto per la $(r+1)^{ma}$ volta il valore $\frac{\pi}{2}$), rispettivamente in virtù della (4) e della prima delle (1):

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{1}{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)} \left\{ \operatorname{sen}\psi \pm \sqrt{\left[1 - \dfrac{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)}{Q(\psi_r)}(1 \pm \cos\psi_r)\right]^2 - \cos^2\psi} \right\} = \\ \qquad = \dfrac{1}{\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)} \left\{ \operatorname{sen}\psi \pm B \right\} \\ \psi' = -\theta' \left[Q - \dfrac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\psi \pm B} \mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) \right], \end{cases}$$

formule valide fino a che $\cos\psi$ non si annulli di nuovo.

Riteniamo: $\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = Q_{r+1}$, essendo Q_{r+1} un valore medio, d'altronde, per ora, imprecisato, di Q nel nuovo intervallo. Le due ultime formule scritte diventano:

$$(8') \qquad \delta = \frac{1}{Q_{r+1}} \{ \operatorname{sen}\psi \pm B_1 \}$$

$$(8'') \qquad \psi' = -\theta' Q_{r+1} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\psi \pm B_1}\right);$$

dove B_1 è il valore assunto da B sostituendovi Q_{r+1} a $\mathfrak{Q}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)$. La (8'') conferma il Lemma dimostrato sopra, e mostra in più che, prima del vertice, per ψ decrescente ($\psi' < 0$) occorre prendere il segno — davanti a B_1. Inoltre, per continuità, il segno davanti a B_1 non cambierà fino a che B_1 non si annulli. E perciò l'angolo ψ, che parte dal valore $\frac{\pi}{2}$, continuerà a crescere (o, rispettivamente, a decrescere) fino a che $B_1 = 0$, ed anche $\cos\psi = 0$ (si noti che B_1 va diminuendo a partire da $\psi = \frac{\pi}{2}$). Ora,

sia ψ_{r+1}, l'angolo *reale* del secondo (o, rispettivamente, del primo) quadrante per cui B_1 si annulla (1). Allora, o ψ, partendo da $\frac{\pi}{2}$, non raggiunge ψ_{r+1}, e la legge di Mayevski è dimostrata; oppure raggiunge tale valore: ma si può provare che *non può oltrepassarlo*, e ciò con la semplice osservazione che allora B_1, e quindi anche δ, diverrebbero immaginari. Se dunque ψ raggiunge il valore ψ_{r+1}, poi dovrà retrocedere: e, da $\psi = \psi_{r+1}$ in poi, varranno allora le (8′) e (8″) col segno cambiato davanti a B_1: sempre la (8″) mostrerà (come sopra) che, da $\psi = \psi_{r+1}$ in poi, ψ deve continuare a decrescere (o, rispettivamente, a crescere). Dunque: o, retrocedendo, ψ non ritorna più (prima del vertice) al valore $\frac{\pi}{2}$, la legge di Mayevski è di nuovo dimostrata; o ritorna a $\frac{\pi}{2}$: e allora rimane solo più da dimostrare che, per $\psi = \psi_{r+1}$, e per $\psi = \left(\frac{\pi}{2}\right)_{r+1}$, δ assume valori aventi forma identica alle (8). Per questo si noti che, durante l'intervallo di retrocessione, a partire da $\psi = \psi_{r+1}$, possono valere, in luogo delle (8′) ed (8″), anche le:

$$[(8''')] \qquad \delta = \frac{1}{Q_{r+1}} \{ \operatorname{sen} \psi \mp B_2 \}$$

$$[(8^{IV})] \qquad \psi' = -\theta' Q_{r+1} \left\{ 1 \mp \frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \psi \mp B_2} \right\};$$

dove, per la (4), è: $B_2 = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \psi_{r+1}}$; se, anche qui, si ponga: $\mathfrak{Q}(\psi_{r+1}, \psi) = Q_{r+1}$.

Dalla (8‴) si ha, per:

$$\psi = \frac{\pi}{2}; \left(B_2 = \cos \psi_{r+1} \right) \quad ; \quad \delta \left(\frac{\pi}{2} \right)_{r+1} = \frac{1 \mp \cos \psi_{r+1}}{Q_{r+1}}.$$

Da quest'ultima, e dalla (8′), notando che il valore medio Q_{r+1} è imprecisato, e assumendo ragionevolmente: $Q_{r+1} = Q(\psi_{r+1})$, si ha finalmente:

$$[(9)] \qquad \begin{cases} \delta(\psi_{r+1}) = \dfrac{\operatorname{sen} \psi_{r+1}}{Q(\psi_{r+1})} \\ \delta \left(\dfrac{\pi}{2} \right)_{r+1} = \dfrac{1 \mp \cos \psi_{r+1}}{Q(\psi_{r+1})}; \end{cases}$$

(1) Che questo angolo ψ_{r+1} sia reale, e tale che $0 < \psi_{r+1} < \pi$, si riconosce osservando che, per $B_1 = 0$, è: $\cos \psi_{r+1} = \pm \left[1 - \frac{Q_{r+1}}{Q(\psi_r)} (1 \pm \cos \psi_r) \right]$; dove $\frac{Q_{r+1}}{Q(\psi_r)} < 1$; $1 \pm \cos \psi_r < 2$; dove dunque: $\left[1 - \frac{Q_{r+1}}{Q(\psi_r)} (1 \pm \cos \psi_r) \right]^2 < 1$.

vale a dire una forma identica alle (8). Quindi tale forma sarà assunta da da δ in tutti i successivi intervalli.

La legge di Mayevski è pertanto dimostrata in generale: *ma solo fino al vertice*, cioè fino a quando Q è certamente decrescente: perchè si osservi che, *oltre il punto di velocità minima*, si ha: $\frac{Q(\psi_{r+1})}{Q(\psi_r)} > 1$, cosicchè non è più dimostrato che la condizione: $\left[1 - \frac{Q(\psi_{r+1})}{Q(\psi_r)}(1 \pm \cos\psi_r)\right]^2 < 1$ (da cui si dedusse: $0 < \psi_{r+1} < \pi$) debba sussistere. In un caso di tiro con mortaio da 210, velocità iniziale 263 m/sec., angolo di proiezione 60°, abbiamo precisamente verificato che, oltre il punto di velocità minima, l'asse del proietto compieva più di un giro intorno alla tangente [1].

Meccanica. — *Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico.* Nota di GIULIO KRALL, presentata [2] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I carichi considerati in scienza delle costruzioni possono, come è noto, essere divisi, quando si scelga un adeguato criterio discriminativo, in due specie ben distinte. Così, più precisamente, ad una di queste si fanno appartenere quei tipi che, pur deformando il sistema, non ne mutano sensibilmente le proprietà caratteristiche di comportamento, in conformità a due classici teoremi risguardanti l'uno, la sovrapposizione degli effetti o degli stati di equilibrio, l'altro, la scomposizione del problema generale del moto oscillatorio libero, in un problema d'equilibrio ed uno di moto sotto l'azione di sole forze elastiche interne.

Nell'altra specie invece, al contrario, si includono quei tipi di sollecitazioni che, anche non portando a superare i limiti di elasticità, determinano variazioni notevoli delle proprietà dei sistemi. Rientrano in essa notoriamente i così detti carichi di punta per i sistemi unidimensionati, gli sforzi tangenziali o di superfice pei sistemi a due dimensioni.

Per fissare in particolare l'attenzione su queste variazioni delle caratteristiche più essenziali di comportamento, consideriamo un sistema, elementare e schematico, ridotto ad un punto materiale P, mobile lungo un asse x, soggetto ad una forza di richiamo $-\omega x^2$ verso l'origine O delle coordinate (ω = cost.). Essendo $U = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2$ il potenziale di una tale forza, si potrà anche dire, che si tratta di un sistema ad un parametro, di energia

(1) Cfr. la mia Nota: *Sul moto e sulla stabilità dei proietti* (« Rivista di Artiglieria e Genio », vol. 2°, 1918).

(2) Nella seduta del 3 giugno 1926.

interna, $-U = +\frac{1}{2}\omega^2 x^2$. Ciò posto, se P (che per semplicità di scrittura assumeremo di massa unitaria) è ulteriormente sollecitato da una forza X, il movimento sarà caratterizzato dall'equazione,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = X .$$

Le due specie di carichi, e quindi di sollecitazioni sopra accennate rimangono in questo caso contraddistinte dalle due ipotesi: 1) $X = a$ (a = cost.); 2) X variabile e perciò, in un intorno convenientemente prossimo dell'origine, con sufficiente approssimazione $= a + bx$ (b = costante non nulla).

Nel primo caso, quando si rimanga nei limiti della legge di Hoocke (e conseguentemente di validità della nostra rappresentazione) si ha un semplice spostamento della posizione di equilibrio da O in O_1 di ascissa $x_1 = \frac{a}{\omega^2}$; e le oscillazioni seguitano ad avvenire con la stessa legge armonica attorno ad O_1 e con la stessa frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$; come pure immutato rimane il comportamento statico di fronte a sollecitazioni della stessa specie. Nel secondo caso invece, posto $x_1 = x - \frac{a}{\omega^2 - b}$, si ha per x_1,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + (\omega^2 - b)x_1 = 0 ,$$

e la struttura elastica rimane manifestamente modificata, intervenendo $(\omega^2 - b)$ al posto di ω^2. Se b è positivo (e, $< \omega^2$), il che corrisponde ad una forza variabile di natura repulsiva, ne rimane diminuita l'elasticità del sistema; il valore $b = \omega^2$ sarebbe addirittura critico, in quanto questa vien completamente meno.

Citerò ancora, a titolo di più espressiva conferma teorica e sperimentale, le condizioni critiche di sollecitazione d'una colonna sottoposta a determinati carichi assiali, la variazione delle frequenze di un'asta sollecitata a sforzi di trazione o compressione; i risultati infine, delle ricerche di Bryan, Pearson, Greenhill, Thymoschenko, Prandtl ed altri [1].

§ 2. Ciò posto, si tratta di estendere le considerazioni svolte sul nostro modello ad un sistema continuo a due dimensioni. Limitandoci a trattare i sistemi piani, sia dunque S una piastra sottile di spessore h, finita ed isotropa, a modulo di elasticità E, coefficiente di contrazione ν. Orientati nella superficie mediana due assi cartesiani x, y; sia l'asse z ad essi normale. Allora, se con $p(x, y)$ si indica una distribuzione di pressioni (dunque

(1) Cfr. A. Nadai, *Elastische Platten*, pp. 231-264, Springer, Berlin, 1925.

agente secondo z), gli spostamenti $w(x, y)$ del punto P di detta superficie (contati ad essa normalmente), sono retti dall'equazione,

$$R\Delta\Delta w(x, y) = p(x, y).$$

In essa, R è dato dal rapporto, $\frac{E h^3 \nu^2}{12(1-\nu^2)}$ che sta manifestamente a indicare la rigidità del sistema, mentre, come al solito, il simbolo $\Delta\Delta$ rappresenta l'operazione $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Allora, se con $G(x, y; \zeta, \eta) = G(P, P')$ specifichiamo una funzione atta a caratterizzare gli spostamenti d'ogni punto P della superfice mediana di S (che chiameremo con σ) generati da un carico normale unitario nel punto P′ di coordinate ζ e η, vale a dire, che sia soluzione dell'equazione,

$$\Delta\Delta G = 0,$$

e, oltre a soddisfare alle condizioni al contorno, abbia, per $P = P'$ quella particolare singolarità che spetta proprio alla forza unitaria [1], avremo, come è intuitivamente manifesto,

$$w(P) = \int_\sigma G(P, P')\, p(P')\, d\sigma'. \tag{2}$$

In questa equazione $d\sigma'$ determina l'elemento di superficie di σ, a cui l'integrale si estende, espresso in termini di ξ e η, vale a dire, delle coordinate del punto P′.

Supponiamo ora, dopo questi preliminari, che la nostra piastra sia sollecitata, oltrechè da carichi normali $p(x, y)$, da azioni tangenziali assegnate ad arbitrio. Dette in conformità, $t_x(P')$, $t_{xy}(P')$ e $t_y(P')$, le tre componenti dello sforzo in P′, caratteristiche di tale sollecitaaione tangenziale, avremo per gli spostamenti w, l'equazione,

$$R\Delta\Delta w = p(x, y) + t_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + t_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + t_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3}$$

con le stesse condizioni al contorno assegnate dai vincoli alla (1). Poichè

(1) Questa singolarità, come è facile verificare, è del tipo $r^2 \log r$, r essendo al solito la distanza tra i punti P e P′. Per cui in definitiva, alla funzione G (funzione di Green dell'equazione biarmonica) compete nel caso nostro la forma,

$$\frac{1}{8\pi R} r^2 \log r + g(P, P'),$$

$g(P, P')$ essendo una funzione continua assieme con le sue prime quattro derivate. Cfr. ad esempio R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, I. p. 291, Springer, Berlin, 1924.

i termini addizionali nel secondo membro della (2) sono formalmente assimilabili ad un carico del tipo di p, si ottiene corrispondentemente alla (2),

$$(4)\qquad w(P) = \int_\sigma G(P, P') \left\{ p(P') - t_x(P') \frac{\partial^2 w(P')}{\partial \xi^2} - 2 t_{xy}(P') \frac{\partial^2 w(P')}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - t_y(P') \frac{\partial^2 w(P')}{\partial \eta^2} \right\} d\sigma .$$

Questa equazione integrodifferenziale, può esser riportata ad una equazione integrale del tipo di Fredholm. Infatti, integrando due volte per parti, il che è legittimo per la definizione della G, ove si osservi che essa si annulla al contorno assieme alla $w(P)$, (ciò almeno nelle più frequenti condizioni di vincolo) avremo,

$$(5)\qquad w(P) = \tau \int_\sigma \Delta(P, P') w(P') d\sigma' + \pi(P),$$

dove τ è un parametro moltiplicativo, e si è posto per brevità,

$$\Delta(P, P') = \frac{\partial^2 G(P, P') \cdot t_x(P')}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 G(P, P') \cdot t_{xy}(P')}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 G(P, P') \cdot t_y(P')}{\partial \eta^2}$$

e

$$\pi(P) = \int_\sigma G(P, P') p(P') d\sigma' .$$

È questa precisamente un'equazione di Fredholm della prima specie (che per $\tau = 1$ include la (4) come si vede facilmente), a nucleo $\Delta(P, P')$, con singolarità logaritmica per $P = P'$. Sono pertanto applicabili, salvo lievi e d'altronde ben note modifiche, imposte appunto dalla accennata singolarità, le formole di Fredholm ed i resultati che da esse ne scendono.

Possiamo perciò inferire, che esisterà una soluzione – ed una sola – finita della (5), purchè τ non sia autovalore dell'equazione omogenea,

$$(6)\qquad w(P) = \tau \int_\sigma \Delta(P, P') w(P') d\sigma' ;$$

Dunque, in particolare, posto $\tau = 1$, la (4), e quindi la (3), avranno una soluzione finita purchè 1 non sia autovalore della (6); ed essa sarà altresì stabile se, indicato con τ_{min} il più piccolo tra gli autovalori, sarà: $1 < \tau_{min}$.

§ 3. Per mantenere infine riscontro al nostro esempio schematico della premessa, sostituiamo alla sollecitazione statica $p(x, y)$ una dinamica agente per un certo istante (una percossa ad esempio) per modo da generare, in condizioni di stabilità, oscillazioni libere di ampiezza e periodo finiti.

Se con $\rho(P')$ indichiamo la massa specifica in P', si avrà, al posto della (4), come naturale applicazione del principio di d'Alembert, convenendo d'indicare con t il tempo,

$$(7) \quad w(P,t) = -\int_\sigma \rho(P')\, G(P,P')\, \frac{\partial^2 w(P',t)}{\partial t^2}\, d\sigma' + \tau \int_\sigma \Delta(P,P')\, w(P',t)\, d\sigma' .$$

Sostituendo all'uso classico, $w(P,t) = u(P)\,\mathrm{sen}\,(\lambda t)$, $u(P)$ essendo una funzione dei soli punti P e λ un parametro incognito, risulta, eseguendo materialmente le operazioni,

$$(8) \quad u(P) = \lambda^2 \int_\sigma \rho(P')\, G(P,P')\, u(P')\, d\sigma' + \tau \int_\sigma \Delta(P,P')\, u(P')\, d\sigma' .$$

Per riportare questa equazione integrale al tipo di Fredholm, indicando con $v(P)$ una funzione ausiliaria incognita, poniamo,

$$a) \quad v(P) = u(P) - \tau \int_\sigma \Delta(P,P')\, \omega(P')\, d\sigma' ,$$

$$b) \quad \lambda^2 \int \rho(P')\, G(P,P')\, \omega(P')\, d\sigma' = v(P) .$$

Da questo sistema manifestamente equivalente alla (8), risolvendo la a), ove si convenga d'indicarne con $\overset{*}{\Delta}(P,P')$ *la risolvente*, risulta,

$$u(P) = v(P) + \int_\sigma \overset{*}{\Delta}(P,P')\, v(P')\, d\sigma' ,$$

e conseguentemente,

$$v(P) = \lambda^2 \int_\sigma L(PP'')\, v(P'')\, d\sigma ,$$

dove il nucleo $L(PP'')$ è dato dalla relazione,

$$L(PP'') = \rho(P'')\, G(P,P'') + \int_\sigma \rho(P')\, G(P,P')\, \overset{*}{\Delta}(P',P'')\, d\sigma' .$$

Ora, in quanto si osservi che la a) è risolubile unicamente sotto la condizione che τ non sia autovalore della equazione omogenea,

$$u(P') = \tau \int_\sigma \Delta(PP')\, \omega(P')\, d\sigma' ,$$

manifestamente identica alla (6), si è riportati ancora, alla stregua del criterio dinamico, alle stesse condizioni di stabilità prima enunciate.

Osserverò infine che, ove gli sforzi t sieno sufficientemente piccoli, per modo che sia legittimo trascurarne il quadrato, vale a dire, ad esempio, esprimibili con tre componenti finite e qualsiasi t_x, t_{xy} ecc., moltiplicate per un valore τ di cui il quadrato è trascurabile, si potrà pervenire ad una relativamente facile determinazione delle frequenze variate $\frac{\lambda}{2\pi}$, poichè in tal caso, la risolvente $\dot{\Delta}(PP')$ coincide (a meno di termini in τ^2) col nucleo $\Delta(PP')$.

Delineati sommariamente i metodi di ricerca della stabilità dell'equilibrio elastico resta a vederli in azione, come pure, debitamente ravvicinati ai procedimenti comunemente usati in quest'ambito di quistioni.

È questo il compito che sarà assolto, con le necessarie illustrazioni in una più estesa Memoria che mi riprometto di pubblicare negli « Annali di Matematica ».

Meccanica. — *Ordine di grandezza delle quantità relative al 2 problema balistico.* Nota di F. Burzio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Sullo scostamento geodetico.* Nota di T. Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un nuovo metodo per la misura di distanze microscopiche ed ultramicroscopiche per mezzo dei reticoli di diffrazione*[1]. Nota di GLAUCO DE MOTTONI, presentata[2] dal Socio G. A. MAGGI.

Or non è molto, venne proposto dal prof. V. Ronchi un nuovo tipo di interferometro stellare, basato su una notevole applicazione dei reticoli diottrici rettilinei e circolari[3]. Una serie di misure di stelle doppie, effettuata dallo stesso Autore[4], diede confortanti risultati poichè questo interferometro permette di raggiungere la stessa sensibilità del metodo di Michelson ed in condizioni più vantaggiose.

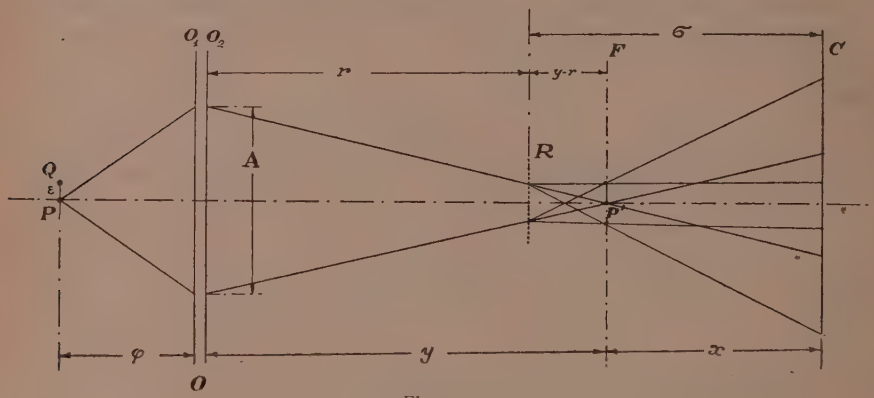

Fig. 1.

Nella presente Nota ci proponiamo di far vedere come l'applicazione dei reticoli diottrici (rettilinei o circolari) al microscopio consenta di aumentare notevolmente il potere risolutivo di questo istrumento.

Le condizioni in cui è chiamato a funzionare questo interferometro sono però così differenti da quelle relative al caso stellare, che non ci potremo più valere delle formole del Ronchi e dovremo impostarne la teoria in modo diverso.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Fisica Complementare della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(3) V. RONCHI, *Un nuovo interferometro stellare*, « Rend. Acc. dei Linc. », I, serie 6ª, 1° sem., fasc. 11, 1925 e II, serie 6ª, fasc. 9, 1925.

(4) V. RONCHI, *Misure di stelle doppie con un interferometro a reticolo*, « Rend. Acc. dei Linc. », II, serie 6ª, fasc. 7 e 8, 1925.

Si consideri all'uopo un obbiettivo O (v. fig. 1) da microscopio, di diametro utile A ed i cui piani principali abbiano in figura le traccie O_1 e O_2. Alla distanza φ da O_1 si trovi una sorgente puntiforme P giacente sull'asse ottico. Sul piano F, che chiameremo piano focale, distante y da O_2, si forma l'immagine reale P′ di P. A distanza x da questo piano poniamo il piano focale C di un sistema oculare. Attraverso a questo sarà pertanto visibile un pallone extrafocale di diametro Ax/y. Se ora tra il piano focale e l'obbiettivo interponiamo normalmente all'asse un reticolo R, piano, rettilineo, di frequenza m (in tratti per cm.), alla distanza r da O_2, accanto a P′ appariranno sul piano focale numerose altre immagini diffratte dei varii ordini, tutte allineate normalmente ai tratti del reticolo. Nel piano C osserveremo allora altrettanti palloni, dei quali ci basterà considerare i tre centrali (di ordini rispettivamente $+1, 0, -1$), i cui centri disteranno mutuamente, con buona approssimazione, di $\lambda m\sigma$ ove $\sigma = x + y - r$ e λ è la lunghezza d'onda della luce impiegata. I tre palloni saranno parzialmente compenetrati quando saranno separatamente soddisfatte le due condizioni seguenti:

$$(1) \qquad ym < \frac{A}{\lambda}$$

$$(2) \qquad x > \frac{\lambda}{A} my\sigma \quad \text{cioè} \quad > \frac{y - r}{\frac{A}{\lambda my} - 1}.$$

In tali condizioni nelle zone comuni a due palloni attigui compariranno delle frangie di interferenza, di frequenza M data da

$$(3) \qquad M = m\frac{y - r}{x}$$

in tratti oscuri per cm., indipendentemente dalla lunghezza d'onda.

Immaginiamo ora di osservare in luogo dell'unica sorgente P due sorgenti puntiformi egualmente intense P e Q distanti mutuamente di ε. Disponendo la PQ normalmente all'asse ottico ed ai tratti del reticolo, nel campo dell'oculare compariranno due sistemi di frangie, spostati l'uno rispetto all'altro della quantità

$$(4) \qquad \frac{\varepsilon}{\varphi}\left(\frac{rx}{y - r} + x + y\right) (1).$$

(1) Infatti i due sistemi di palloni saranno tra loro spostati di $\varepsilon(x + y)/\varphi$; inoltre, rispetto all'onda sferica uscente da Q, il reticolo appare spostato in senso opposto della quantità $\varepsilon r/\varphi$, per cui le frangie subiranno un ulteriore spostamento, nel senso originario, dato da $m\varepsilon r/M\varphi$.

Complessivamente i due sistemi di frangie appariranno dunque spostati l'uno rispetto all'altro della quantità espressa appunto dalla (4).

Quando questo spostamento totale importerà un numero dispari di semiperiodi, avremo un minimo di visibilità delle frangie, perchè i massimi di luce di un sistema cadranno sui minimi dell'altro.

Ai varii minimi di visibilità delle frangie corrisponderanno pertanto i seguenti valori della distanza ε tra i due punti luminosi osservati:

$$\varepsilon = \frac{2K-1}{2} \frac{\varphi}{my} \frac{x}{\sigma} \qquad (K = 1, 2 \cdots)^{(1)}. \tag{5}$$

Il caso che a noi attualmente interessa è, come vedremo in seguito quello per cui $K = 1$ con che la (5) diventa

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{2my} \frac{x}{\sigma} \tag{6}$$

oppure anche

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{2y} \frac{1}{M + m}. \tag{6}'$$

Massimo potere risolutivo teorico. – Dalla (6) si vede subito che per accrescere il potere risolutivo occorrerà:

1° diminuire il rapporto φ/y. Ciò non si potrà fare al di là di un certo limite imposto dalle caratteristiche dell'obbiettivo;

2° accrescere la frequenza del reticolo, che però non potrà mai raggiungere il limite massimo $A/\lambda y$ segnato dalla (1);

3° diminuire il rapporto x/σ, con che però si diminuisce la zona in cui sono visibili le frangie. Se N è il numero delle frangie presenti, la ε è collegata ad N dalla relazione

$$\varepsilon_N = \frac{1}{2} \varphi\lambda \left(A - N \frac{y}{m(y-r)} \right)^{-1}$$

dalla quale scende che nel caso limite di $N = 0$ si ottiene per ε il minimo valore ε_0 seguente

$$\varepsilon_0 = \frac{\varphi\lambda}{2A}. \tag{7}$$

In queste condizioni limiti però non si vedono più frangie poichè i palloni extrafocali sono tra loro tangenti; ma si dimostra che nella pratica ci si può avvicinar molto a questa condizione raggiungendo per la ε_N un

(1) Il sistema costituito dall'insieme dei due sistemi non localizzati è dunque un sistema localizzato. Nel caso trattato dal Ronchi è $x = \sigma$ poichè ivi si può trascurare la $y - r$ rispetto alla x.

valore che nelle più sfavorevoli condizioni supera del 10 % il valore limite ε_0 (1).

Ricordando che l'apertura numerica u dell'obbiettivo è data da $u = \text{arctg}\,\frac{A}{2\varphi}$ si otterrà

$$\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{4\,\text{tg}\,u}$$

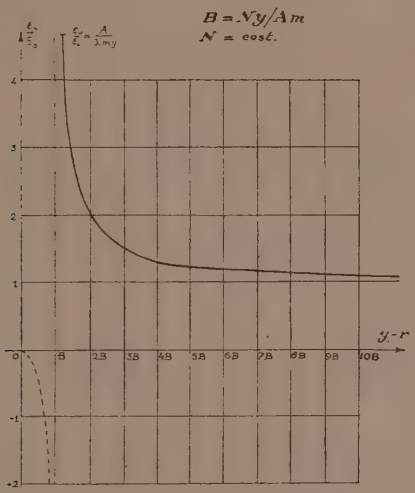

Fig. 2

(1) Infatti ponendo $Ny/Am = B$ si ottiene

$$\frac{\varepsilon N}{\varepsilon_0} = \left(1 - \frac{B}{y - r}\right)^{-1}$$

rappresentata graficamente nella figura 2. Il ramo punteggiato della curva non va considerato non corrispondendo alle condizioni del problema; infatti in esso si avrebbe $N > Am\,(y - r)/y$ mentre che N è dato da $N = (A/y - \lambda m\sigma/x)\,(y - r)\,m$. Dalla equazione della curva risulta che, fissati A, y ed N converrà tenere m prossimo al limite massimo imposto dalla (1), e dovendo sempre essere $y - r < y$. la massima ascissa del diagramma dovrà soddisfare alla condizione

$$y - r < A\,2\,B/\lambda y N$$

la quale tradotta in cifre, e nelle più sfavorevoli condizioni possibili ($A = 0.2$ $y = 15$ $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$) nel caso di tre frangie oscure ($N = 3$) diventa

$$y - r < 14.8 \cdot B$$

ed anche tenendo il reticolo a notevole distanza dall'obbiettivo (per $y - r = 2y/3$) il rapporto non supererà il valore

$$\varepsilon_3/\varepsilon_0 = 1.11.$$

Ciò significa che sostituendo la ε_0 alla ε_3 non commetteremo mai un errore in difetto superiore al 10 %.

e, naturalmente, usando un sistema ad immersione con liquido ad indice di rifrazione n avremo

$$\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{4\, n \operatorname{tg} u}.$$

Confrontiamo questa espressione con quella che esprime la minima distanza ε'_0 risolubile visualmente nelle osservazioni microscopiche ordinarie, e che, per la teoria di Abbe, è

$$\varepsilon'_0 = \frac{\lambda}{2\, n \operatorname{sen} u}.$$

Il presente interferometro ha dunque un potere risolutivo teorico massimo che risulta $2/\cos u$ volte maggiore di quello che lo stesso obbiettivo permette di ottenere mediante osservazioni visuali dirette.

Il valore di u nei moderni microscopi può superare i 70° e pertanto *questo dispositivo interferenziale aumenta di circa sei volte il potere risolutivo normale, raggiungendo così una penetrazione sino ad oggi mai raggiunta* [1].

Uso delle formole ottenute. – Immaginiamo ora di puntare il nostro obbiettivo e di fissarlo ad una certa distanza φ dalla coppia di punti luminosi. Fissiamo anche l'oculare alla distanza x dal piano focale. Interponiamo poi tra questi due sistemi ottici un reticolo di diffrazione, di frequenza m tale da soddisfare la (1). Avremo cioè in tal modo fissati gli elementi φ, y, x, ed m. La (6)′ ci dice senz'altro che variando la distanza $y - r$ (ossia spostando lungo l'asse il reticolo, senza ruotarlo, e mantenendolo in posizione intrafocale) potremo dare alla ε tutti i valori compresi tra

(9) (10) $$\varepsilon_{min} = \frac{\lambda}{4 \operatorname{tg} u} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{max} = \frac{\varphi}{2\, my}$$

e per la (6)′, ad ogni valore di ε corrispondendo uno ed un solo valore della frequenza M delle frangie, consegue che ai due limiti ora scritti per ε corrisponderanno ordinatamente i due limiti seguenti per M:

(11) (12) $$M_{max} = \frac{A}{\lambda y} - m \quad \text{e} \quad M_{min} = 0.$$

Se dovremo effettuare la misura di dimensioni ε prossime al limite inferiore ε_{min}, convenendo sempre operare con frangie non troppo strette, sceglieremo, con l'aiuto della (11), gli opportuni valori da darsi alle gran-

(1) Infatti col sistema del Gerhardt («ZS. f. Phys.», *35*, 697, 1926) che applica l'interferometro di Michelson, si giunge a raddoppiare il potere risolutivo, e la minima distanza risolubile non può scendere al di sotto di $\lambda/4$ mentre coi reticoli non è imposto alcun limite assoluto di questa natura.

dezze A, y ed m. Se si dovesse poi passare alla misura di una distanza relativamente grande, si potrà, se si rendesse necessario, elevare il limite massimo dato dalla (10) aumentando il valore del rapporto $\varphi\, y$ (spostando l'obbiettivo oppure cambiandolo) ed ove ciò non bastasse sostituendo il reticolo con uno a minor frequenza.

Vediamo ora come si passi dal caso di due punti luminosi a quello di un oggetto microscopico. Consideriamo un corpuscolo, supposto per un momento sferico, ed illuminiamolo con luce obliqua radiale (come quella che fornisce ad esempio un condensatore paraboloide o cardioide). Nel campo oscuro il corpuscolo apparirà come un anello luminoso circolare. Senonchè, agli effetti degli spostamenti osservabili delle frangie tutti i punti luminosi giacenti su una parallela ai tratti del reticolo sono equivalenti. All'anello luminoso potremo quindi pensare sostituito un segmento avente in ogni punto un'intensità luminosa proporzionale alla sezione dell'anello eseguita nella direzione parallela ai tratti del reticolo passante per quel punto. In definitiva tale segmento sarà costituito da due punti brillanti occupanti gli estremi, e da una linea luminosa, molto meno brillante, che li congiunge, e la cui intensità decresce verso il centro. Orbene è questo particolare aspetto che ci fornisce un controllo per assicurarci che la condizione $K = 1$ sia soddisfatta, ossia che ci si trovi al primo minimo di visibilità delle frangie. Infatti allora, per effetto dei punti intermedii del segmento, avremo oltre al minimo di visibilità anche la presenza di una periodicità nei minimi di luce, ciò perchè gli intervalli tra le frangie chiare (susseguentisi a distanza di un semiperiodo) appariranno alternativamente più e meno illuminati.

Quando invece fosse $K \neq 1$ tale periodicità scomparirebbe, ed i minimi di luce apparirebbero tutti della stessa intensità.

Quanto abbiamo ora detto per un corpuscolo sferico può ripetersi anche per il caso di un corpuscolo di forma qualunque, per cui il detto controllo della condizione $K = 1$ potrà sempre eseguirsi, purchè si faccia uso di un'acconcia illuminazione.

Realizzazione pratica. – Fissato l'obbiettivo e postolo alla normale distanza dall'oggetto e scelto con l'aiuto della (1) il reticolo di frequenza m, ci assicureremo mediante le formole (9) e (10) che la probabile dimensione da misurare sia compresa entro i limiti che la scelta fatta degli elementi φ, y ed m comporta. Ciò fatto si porrà il reticolo nel piano focale. Partendo da questa posizione avvicineremo lentamente il reticolo all'obbiettivo sino a tanto che le frangie, che subito compaiono nel piano oculare [1] e che andranno man mano sdoppiandosi, non offriranno il primo minimo

(1) Il piano focale dell'oculare sarà a distanza x da quello dell'obbiettivo, tale da soddisfare alla (1).

All'oculare può con vantaggio sostituirsi uno spettroscopio.

di visibilità; il controllo fornito dalla periodicità nell'intensità dei minimi di luce ci confermerà trattarsi proprio del « primo minimo » (K = 1). Misurata allora la distanza r del reticolo dall'obbiettivo, la formola (6) ci fornisce senz'altro la misura della ε cercata.

Se si volesse ripetere la misura con frangie a frequenza diversa, basterebbe mutare la distanza φ tra l'obbiettivo e l'oggetto osservato.

Ripetendo le osservazioni con diverse orientazioni del reticolo si otterrà la misura delle dimensioni dell'oggetto in quelle direzioni, e si potrà con tutta facilità concludere circa la forma del corpuscolo in esame, anche se esso è talmente piccolo da rivelarsi soltanto con l'illuminazione ultramicroscopica. Utilmente potranno anche impiegarsi reticoli circolari dei quali non occorrerà naturalmente variare l'orientamento.

In una prossima Nota verrà reso conto delle esperienze in corso, relative alla misura di distanze microscopiche ed ultramicroscopiche col presente dispositivo.

Mi è intanto particolarmente grato ringraziare il chiarissimo prof. A. Pontremoli per avermi suggerito il tema della presente ricerca e per essersi voluto costantemente interessare al suo svolgimento.

Geofisica. — *I risultati delle crociere della R. Nave « Marsigli » nello stretto di Messina.* Nota di Francesco Vercelli, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

IV. — Influenze dei fattori fisico-chimici sul regime delle correnti.

Nella Nota II fu osservato che il regime delle correnti nello stretto di Messina dipende direttamente da quello delle maree locali, non muta ritmo al variare delle stagioni e delle condizioni atmosferiche ed è suscettibile di una figurazione analitica, mediante una somma, limitata a pochi termini del tipo

$$I = i + \sum_1^n I_p \sin (a_p t + \alpha_p)$$

ove I indica la velocità della corrente, in dato sito, in funzione del tempo t e delle costanti I_p, a_p e α_p, le quali caratterizzano ampiezza, periodo e fase degli armonici componenti. La costante i ha il significato di valore medio della corrente I, in un lungo intervallo di tempo T, che sia prossimamente multiplo dei periodi degli armonici componenti, cioè

$$i = \frac{1}{T} \int_0^T I \, dt.$$

(1) Nella seduta del 16 maggio 1926.

Questa componente i del flusso totale I è indipendente dal tempo. Tutti gli altri termini componenti rappresentano correnti alterne, aventi periodi identici a quelli propri degli armonici di marea. Le ampiezze e le fasi di tali termini sono inoltre caratterizzate da rapporti, o da differenze, che risultano pienamente affini agli analoghi valori dei dislivelli delle maree locali. Queste proprietà, come la trattazione completa di tutti gli argomenti riferentisi alle osservazioni di maree e di correnti, e le applicazioni alle previsioni di tali fenomeni, sono ampiamente esposte in un volume pubblicato dalla Commissione internazionale del Mediterraneo (1).

Proseguendo lo studio sui dati raccolti nelle crociere della « Marsigli », i problemi di indole dinamica, studiati in un primo tempo senza tenere conto delle mutevoli condizioni fisiche delle acque nel corso delle stagioni, vennero esaminati anche con riguardo alle influenze che tali condizioni possono esercitare sul regime dei moti.

I risultati conseguiti nello studio delle condizioni fisico-chimiche delle acque nulla aggiungono o tolgono alla figurazione analitica locale, o euleriana, delle correnti. Offrono invece elementi complementari di alto valore per l'investigazione dei fenomeni dal punto di vista lagrangiano, o molecolare. Si osserva infatti che i due bacini marini congiunti dallo stretto, presentano, nel corso delle stagioni, condizioni fisico-chimiche distinte fra loro e diverse da strato a strato fra superficie e fondo. Le acque che scorrono dall'uno all'altro mare, per quanto subiscano, nei rimescolamenti lungo il percorso, alterazioni continue nei caratteri originariamente posseduti, tuttavia conservano sempre aspetti bene riconoscibili; la temperatura e la salsedine sono le due proprietà che in tale riconoscimento servono meglio di guida; e dalle distribuzioni delle temperature e delle salinità si rilevano, con ogni sicurezza, i lineamenti caratteristici delle circolazioni interne delle acque.

Si constata in tal modo che la parte meridionale dello stretto, fra l'ingresso sud e la sella sottomarina di Punta Pezzo, ove le vallate jonica e tirrenica raggiungono il massimo sollevamento (circa 100 metri di profondità), è sede di una circolazione propria, che porta le acque degli strati profondi da sud verso nord, con moto obliquo prossimamente parallelo al declivo ascendente del fondo marino; le acque profonde raggiungono livelli via via più elevati; ripiegano poi in alto e in verso opposto, alimentando una controcorrente permanente di ritorno verso il Jonio, negli strati superiori del canale. Se dallo stretto settentrionale scende corrente dal Tirreno al Jonio, questa si aggiunge a quella già esistente nella parte sud dello stretto; tutto il flusso ascendente nella parte profonda della vallata jonica ripiega, in tal caso, verso il bacino di provenienza. Quando invece sulla sella sottomarina prende inizio la montante dal Jonio al Tirreno, le acque ascen-

(1) F. Vercelli, *Crociere per lo studio dei fenomeni nello stretto di Messina.* Parte I: *Il regime delle correnti e delle maree.* Tip. Ferrari, Venezia, 1925.

denti sul fondo della vallata jonica, pur continuando ad alimentare ancora in parte la controcorrente superiore, si elevano sulla sella ed avanzano verso il Tirreno. La massa di acque abissali transitanti sulla sella durante la montante è così imponente da sollevarsi sino nei pressi della superficie, rimescolandosi fortemente colle acque degli strati superiori e determinando una corrente in cui prevalgono le proprietà di acque abissali fredde e molto salse.

Oltrepassata la sella tali acque, per ragioni di densità, tendono ad immergersi in strati via via più profondi del bacino tirrenico, dando origine a una falda acquea, che si estende in tutto l'arco compreso fra le isole Eolie e le adiacenti coste calabro-sicule, ed è riconoscibile dalle tipiche condizioni di temperatura e di salsedine, nettamente distinte da quelle proprie delle acque locali tirreniche sovrastanti.

Anche nel breve e angusto tratto della vallata compresa fra l'ingresso nord dello stretto e la sella, col passaggio della scendente i flussi marini sono accompagnati da notevoli spostamenti convettivi verso l'alto. Il fatto appare molto evidente nelle epoche primaverili ed estive; allora le acque comprese fra la superficie e la falda di acque joniche dianzi accennata, nel bacino di fronte allo stretto hanno temperature di circa 13°.6-13°.7 e salinità inferiore a 38 ‰; la falda di acque joniche sottostanti ha invece temperature di circa 14° e salinità di oltre 38.3 ‰. Al transito della scendente sulla sella non furono mai osservate, nei pressi del fondo, temperature e salinità proprie di acque tirreniche pure, ma sempre si ebbero valori tipici di acque rimescolate con quelle degli strati profondi. I dislivelli esistenti fra il fondo della sella e il fondo del bacino all'ingresso dello stretto sono tuttavia solo dell'ordine di circa 200 metri; le dimensioni della vallata corrispondente sono ovunque molto ristrette; e in complesso i moti convettivi verso l'alto, in questa parte dello stretto, non raggiungono l'estensione e l'importanza che hanno invece nel canale meridionale.

L'esame delle stratificazioni termiche e aline porta anche ad ammettere che non tutta la massa acquea entrata nello stretto colla scendente raggiunga e varchi la sella, ma in parte ripieghi in forma di controcorrenti interne e laterali. Le acque superficiali, meno ostacolate nel loro cammino, percorrono lo stretto sino alla sella senza alterare sostanzialmente la stratificazione termica e alina propria del bacino di provenienza; oltre la sella si rimescolano invece gradualmente colle acque emergenti dagli strati inferiori, si arricchiscono in salsedine e si raffreddano notevolmente, nelle epoche in cui la loro temperatura originaria supera quella delle acque interne del Jonio, e quindi nella più parte dell'anno.

Chi in un dato punto della sella osservi la successione dei valori della temperatura e della salsedine trova che le proprietà delle acque rispecchiano esattamente il ritmo delle alterne correnti.

Dai minimi valori osservati nella temperatura delle acque abissali joniche transitanti sulla sella e dalle salinità di esse si è potuto dedurre che tali

acque devono essere originarie da strati jonici profondi almeno da 500 a 1000 m. L'esame delle stratificazioni isoterme e isoaline lungo lo stretto consente inoltre di rilevare il graduale elevamento delle acque di fondo fra l'ingresso sud e la sella, come il progressivo abbassamento di esse negli strati profondi del bacino tirrenico.

Già dall'esame dei valori ottenuti nelle misure degli scorrimenti orizzontali eravamo stati indotti ad ammettere che nello stretto i moti advettivi siano accompagnati da rilevanti spostamenti convettivi; la conoscenza dei caratteri fisici delle acque porta a confermare e a precisare tale fatto, con evidenza che toglie ogni possibile dubbio.

Sotto aspetto cinematico i dati fisico-chimici presentano dunque basi di valore essenziale per completare la descrizione del regime dei moti nello stretto di Messina. Tali dati forniscono anche gli elementi occorrenti per investigare alcune questioni dinamiche, che nel primo studio sulle correnti furono poste, ma non risolte, essendo chiaro che la soluzione di esse doveva essere cercata nelle condizioni delle acque.

La prima di tali questioni riguarda l'interpretazione che si deve dare al termine i, che nella figurazione analitica delle correnti locali si presenta con questi caratteri: È un termine indipendente dal tempo, rappresentante perciò una corrente progressiva; è costante per ogni sito; varia da punto a punto, ma in guisa da rappresentare normalmente una corrente scendente dal Tirreno al Jonio, negli strati superiori (fra la superficie e 30 m. sulla sella), e una controcorrente montante dal Jonio al Tirreno, negli strati profondi; rispetto alla somma degli armonici componenti, il termine i ha importanza del tutto secondaria nei siti ove le correnti sono massime (sulla sella), ma ha portata relativamente maggiore nelle epoche e nei siti di minime correnti; nel canale meridionale la componente i ha importanza prevalente nel ritmo delle correnti.

La teoria dei moti di marea non dà ragione dell'esistenza di questo sistema di correnti e di controcorrenti progressive, che si aggiungono a quelle alterne di marea, e riproducono, sia pure in forma assai ridotta, uno degli aspetti distintivi dei flussi marini nei canali congiungenti mari con acque diversamente dense (Gibilterra, Bosforo, Bab-el-Mandeb, ecc.). L'analogia fa sospettare che il fenomeno tragga origine da eguali cause, cioè da permanenti differenze di densità fra le acque del Jonio e del Tirreno.

Le osservazioni confermano tale punto di vista: le acque joniche sono più salse e più calde di quelle dei corrispondenti strati del Tirreno; i due caratteri operano in senso opposto sugli incrementi di densità; ma prevale quello dovuto alla maggiore salsedine. Nel Jonio si ha quindi densità maggiore e pressione analogamente maggiore nell'interno delle masse acquee. Per quanto le alternative delle correnti determinino situazioni mutevolissime nell'interno dello stretto, tuttavia si constata che i medi valori delle cor-

renti *i* risultano distribuiti come se i moti di marea non esistessero, ma solo si avesse la circolazione stazionaria corrispondente alle condizioni di densità delle acque dei due bacini: cioè nell'interno si ha un flusso diretto come il gradiente di pressione, dalle più dense acque del Jonio a quelle meno dense del Tirreno, e superiormente una controcorrente di compensazione, scendente dal Tirreno al Jonio.

Si dimostra pure, partendo dai principii della conservazione delle masse e della salinità, che la circolazione ora descritta deve portare masse acquee diverse attraverso distinte sezioni dello stretto, cioè devono esistere correnti derivate interne che fanno rifluire al mare di provenienza parte delle acque entrate nello stretto, prima che esse raggiungano le sezioni minime che si hanno sulla sella sottomarina. Anche per questa via si viene così a chiarire la natura delle circolazioni interne e dei moti convettivi.

Una seconda questione non spiegata dalla teoria dei moti di marea è la presenza, fra le componenti delle correnti alterne, di un termine avente periodo eguale a un mezzo mese sinodico lunare, come l'armonico Mf di marea, ma ampiezza così rilevante da non essere identificabile con l'armonico stesso. I dati sperimentali avevano portato a considerare la curva figurante questa oscillazione quindicinale come una sinusoide semplice, in via di approssimazione; quando le maree sono massime (epoca sizigiale) l'oscillazione quindicinale raggiunge pure valori massimi positivi e rappresenta quindi una corrente montante dal Jonio al Tirreno, che si aggiunge a quelle proprie di marea, accrescendo così la montante e diminuendo la scendente; quando le maree sono minime (epoca delle quadrature lunari) l'oscillazione quindicinale è in fase di minimo, e rappresenta una corrente scendente, che attenua gli scorrimenti della montante e accresce invece le velocità della scendente. Questa azione è così notevole che le curve di corrente non risultano simmetriche rispetto all'asse di velocità nulla; la dissimmetria è particolarmente evidente nell'epoca delle correnti minime; si ha allora, nei pressi della superficie, un predominio della scendente, e attenuazione, o anche totale mancanza, in certi settori, della montante.

Simili oscillazioni quindicinali non si osservano nei dislivelli delle maree. Il fenomeno, per quanto legato al ciclo delle maree, sembra quindi dovuto ad altre cause: topografiche (diversa estensione relativa dei bacini jonico e tirrenico formanti lo stretto), meccaniche (forza viva delle masse in moto, attriti) e fisiche (galleggiamento della scendente tirrenica, affondamento della montante jonica, per legge di densità). Tali cause opererebbero in questo modo: In epoca sizigiale l'enorme massa di acqua avanzante nella valle jonica anche dopo cessata la montante, continua, per inerzia, ad avanzare contro la scendente dal Tirreno, rallentandone il corso. La massa relativamente assai minore di acque del bacino tirrenico, a nord della sella, oppone resistenza assai minore al deflusso della montante. Rispetto al medio

valore delle correnti il fenomeno avviene come se alla montante si aggiungesse un termine di stesso segno, e alla scendente un termine di segno opposto. Col diminuire delle velocità delle correnti, diminuisce anche il valore del termine aggiuntivo. In epoca di quadrature la massa di acque della montante è ridotta a proporzioni assai minori e interessa prevalentemente gli strati profondi, offrendo perciò lievi resistenze alla scendente superficiale; entrata nel bacino tirrenico si affonda, senza riempire tutto lo stretto sino alla superficie, e subisce un forte rallentamento. Si hanno cioè condizioni opposte a quelle sizigiali: ora è la montante che viene rallentata, mentre la scendente è accelerata, rispetto al medio valore dei flussi.

I rimescolamenti e le condizioni mutevoli che si stabiliscono, in relazione colle fasi delle correnti, determinano situazioni che esercitano azioni complementari assai complesse; tuttavia la fluttuazione quindicinale, pur venendo così perturbata, conserva una forma che non si scosta fortemente da quella sinusoidale, e non presenta mutazioni apprezzabili nel corso delle stagioni, precisamente come avviene per tutti gli altri armonici componenti.

In definitiva si può dire che dal complesso delle ricerche fisico-chimiche risultano confermate le interpretazioni già date al regime delle circolazioni interne delle acque messinesi; alcuni aspetti dei fenomeni vengono posti in luce, in forma estremamente evidente e persuasiva; diverse questioni, rimaste insolute nello studio basato sui dati delle misure di corrente e sulle relazioni fra correnti e maree, ricevono ora una soluzione che sembra soddisfacente. I lineamenti generali delle correnti dello stretto di Messina sono così precisati sotto ogni aspetto sulla scorta di salde basi sperimentali.

Fisica. — *Sopra l'effetto Doppler nella fluoroscenza sensibilizzata.* Nota di F. Rasetti, presentata dal Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Colori di mescolanza dell'acqua con acido acetico e con alcool isopropilico.* Nota di C. Sandonnini, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sugli ossidi di idrati di cobalto. - Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto.* Nota di G. Natta e F. Schmidt, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Esame röntgengrafico degli idruri metallici. Idruri di rame.* Nota di A. Quilico, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Sulla possibilità di ibridare specie poco affini col mezzo della jonolisi.* Nota di Alberto Pirovano presentata [1] dal Socio Romualdo Pirotta.

Ho esposto nella precedente nota [2] alcune mie particolari vedute intorno agli effetti di forze fisiche esteriori quando vengono fatte agire sull'idioplasma, precedentemente alla fecondazione.

Secondo il mio concetto iniziale, se poteva sopporsi un'influenza della jonizzazione sul polline delle specie, varietà e razze botaniche, questa influenza non poteva essere che debilitativa, in quanto la jonizzazione sconvolge l'ordinamento molecolare dell'idioplasma, stupendamente perfetto nella sua rigida costituzione. Quando poi per jonizzare s'impieghino raggi di cortissima onda o emanazioni del radio si è tratti a pensare ad uno sconvolgimento più intimo.

Siamo ora a cognizione di plurali fatti che, almeno in apparenza, contrastano col suesposto concetto, dal quale ho preso le mosse per alcune mie esperienze di elettrogenetica botanica; esperienze che dimostrano concordemente come le azioni jonizzanti (sul polline) indeboliscono, deviano ed annichilano rispettivamente il vigore, le caratteristiche specifiche e la vitalità secondo la forma, l'entità e la durata dell'jonizzazione.

Il concetto da me seguito e pazientemente tradotto in realtà, è impostato su una ammissione ormai accetta: essere la prima cellula embrionale la determinante della vita e delle caratteristiche individuali. Secondo il mio concetto una vita avviata può paragonarsi ad un convoglio in moto *in una direzione*, sur un binario rettilineo. Forze incidenti od avverse potranno ritardare, arrestare il convoglio, rovesciarlo se sono violente: metterlo su un binario diverso, mai.

Qualsiasi azione intesa ad influire sulla direzione di questo convoglio virtuale, deve perciò applicarsi prima che s'inizî il suo moto. Occorre adunque preparare lo scambio opportuno prima che il convoglio di vita inizî la sua corsa.

(1) Nella seduta del 3 giugno 1926.

(2) Questi «Rendiconti», vol. II, serie 6ª, 2° sem., fasc. 5° e 6°. Roma, settembre 1925, pp. 217-221.

Occorre agire, cioè, sugli elementi della vita, sui gameti, *prima* della fecondazione, seguendo poi lo sviluppo delle piante derivate da cellule embrionali rese in tal modo anormali. Due vie erano aperte all'indagine ed all'azione: il polline e l'ovulo.

Per ragioni fisiologiche e tecniche, ed in particolar modo per la considerazione che l'ovulo ha funzioni nutritive, oltre che genetiche, la maggior parte delle mie esperienze è stata compiuta sul polline, facile a raccogliere, a conservare per breve tempo, ad assoggettare agli apparecchi.

È opportuno però notare che, per le mie esperienze, ho usato largamente di un nuovo mezzo di jonizzazione, al quale i comuni elettroliti ed i gas sono insensibili, ma che si è dimostrato eccellente in genetica, perchè meno lesivo della vitalità.

A questa nuova forma blanda di jonizzazione, geneticamente utilissima e diversa della jonizzazione per raggi, ho dato per brevità – e per tradurre il concetto della minore violenza cinetica in gioco nel fenomeno – il nome di *jonolisi*. Essa viene prodotta con speciali elettromagneti anulari o rettilinei, del resto semplicissimi, che danno in cortissimi tubi di forza, campi magnetici intensi e varianti a norma dell'eccitazione, più o meno rapidamente; probabilmente l'azione magnetica ritmicamente alternante o pulsante, agendo sui campi di forza molecolari dell'idioplasma riesce a dividere e forse a trasporre e ricomporre in nuove aggregazioni una parte, la più labile, naturalmente, di esse.

Durante la variazione di campo magnetico, nel polline posto nell'intraferro ha luogo uno speciale effetto d'induzione, di natura diversa da quella che, in analoga condizione, indurrebbe correnti di Foucault nei metalli, o comunque in conduttori non elettroliti. Il plasma genitale del polline può considerarsi, agli effetti elettrici, un liquido elettrolito. Infatti, a prescindere dalla sua organizzazione vitale, altro non sarebbe che una complessa soluzione acquosa.

Ma, appunto per il fatto di essere vitale, il polline è un elettrolito eccezionalissimo: esso contiene elementi costruttivi esattamente ubicati e suscettibili di costruire secondo un modello preciso e prestabilito.

Come in una macchina ogni pezzo ha il suo posto, così nei minutissimi cromosomi, edili della specie, la materia costitutiva ha una ubicazione definita, rigida, immutabile. Perciò si perpetua la specie, senza mutare, attraverso i secoli.

Pur scartando l'ipotesi che i cromosomi delle cellule riproduttive siano detentori di forze accumulate, che costituirebbero la discussa energia vitale, ed ammettendo che la forza motrice della meravigliosa macchina vitale, venga attinta anche nei primissimi istanti della vita all'ambiente esteriore, non s'infirma la lampante verità che fra le molecole del plasma genitale e loro gruppi esistono, in composizione statica complessa, campi di forza che

sono appunto quelli inter-atomici noti; forze di coesione molecolare ed altre inscrutabili, ma non dubbie, che mantengono tale collegamento molecolare tenacemente eretto in struttura vitale.

Ma, su questi complessi e varî campi di forza, semplici o composti, l'azione elettrica non è senza effetto. Di conseguenza, azioni motomagnetiche possono influire. Da ciò appunto è nata l'idea d'applicare il campo magnetico variante per una manovra che si può ritenere blandamente disaggregatrice: la *jonolisi*.

La jonolisi lascerebbe intatta l'ossatura dell'edificio cromosomico, sposterebbe e trasporterebbe qualche jone soltanto superficialmente nel complesso aggregato delle molecole colloidi. L'ordinaria jonizzazione per raggi, particolarmente coi raggi β e γ del radio, ha invece azione profonda; pervade e sconvolge tutta la massa atomica. I fatti dimostrano che questa disaggregazione è rapidamente deleteria pel plasma genitale, segnatamente sugli organi femminili.

Ma, non soltanto per questo, la jonolisi è geneticamente superiore alla jonizzazione. Questa, sia che s'adoprino i raggi X, od i raggi β e γ del radio, può soltanto essere attenuata, aumentando la distanza fra la sorgente radiante e l'oggetto; ma non cambiata pertanto nella frequenza, sempre altissima, del periodo vibratorio.

Con la jonolisi, al contrario, la frequenza può essere cambiata a volontà. È così possibile trovare per tentativi la frequenza più idonea pel delicato ufficio (il solo geneticamente utile) di una perturbazione molecolare che rispetti la vitalità. Questa possibilità d'intonazione offerta dalla jonolisi fra l'azione elettrocinetica e la costituzione specifica del plasma genitale, apre vastissimi orizzonti in un campo del tutto vergine.

Già i primi risultati, benchè ottenuti con apparecchi rudimentali, dànno buon affidamento per l'avvenire, particolarmente nell'ibridazione. Si riesce a graduare, attenuandola quando esiste, la dominanza del fattore mascolino, fino ad annullarla completamente.

Notevole il fatto che in piante monoiche la sessualità si comporta come un caratterere mendeliano: così la mascolinità s'attenua o sparisce allorchè il polline è jonolizzato in medio od alto grado. Ma di ciò troverà ampio ragguaglio, chi s'interessa, nel mio libro [1], nel quale ho anche fatto rilevare come le azioni elettromagnetiche a lento periodo tornassero particolarmente idonee a provocare nel genere *Cucurbita* effetti trasformativi che nella maggioranza dei casi si svolgono nel senso di un indebolimento del complesso delle caratteristiche ereditarie trasmesse dalla specie che nell'incrocio funziona da maschio. In altri casi invece si hanno effetti di notevole rinvigorimento.

(1) Alberto Pirovano, *La mutazione elettrica delle specie botaniche*. Milano, Hoepli, 1922.

*
* *

Nel caso di ibridazioni tra specie normalmente incompatibili a coniugarsi, con blando trattamento jonolitico si perviene ad amalgamare i caratteri ereditarî agevolando la simbiosi degli elementi idioplasmatici eterogenei.

Appartengono a questa serie le esperienze sull' incrocio bigenere Pruno × Pesco. In questo, come in altri connubî difficili, si può dimostrare la giovevole azione corroborante della jonolisi in appropriata intonazione.

Le piante nate dalla ibridazione di queste due rosacee hanno caratteri morfologicamente identici al fattore paterno, cioè non si distinguono dai peschi. Le piante costituenti la F_1 dell' ibrido normale sono molto somiglianti fra loro, e questa omogeneità della F_1 è stata da me osservata tanto sugli ibridi ottenuti dal dott. Ragionieri (1) quanto su quelli ottenuti nelle mie proprie esperienze. Io ho preso come femmina il « Susino Burbanck » e come maschio il « Pesco Morellone ».

La nascita dell' ibrido normale è stentata, probabilmente pel fatto che il pruno germina coi cotiledoni che rimangono aderenti al fusticino e vengono portati fuori terra, mentre il pesco li abbandona in terra: la germinazione è faticosa nell' ibrido perchè, infine, è un gheriglio di pruno che è costretto (per la dominanza del fattore mascolino) a germinare a modo del pesco.

La blanda jonolisi a 42 periodi, che per il genere *Cucurbita* è sovrana amalgamatrice nei casi di incompatibilità, non ha avuto analoga efficacia, nè ha accelerato la germinazione dei semi.

Invece col polline jonolizzato in campo magnetico alternante a 600 periodi, l'anticipo di germinazione, la robustezza delle piante, l'alterazione dei loro caratteri fogliari è stata notevolissima. Anche col polline assoggettato ai raggi ultravioletti ed ai raggi β e γ si sono avuti, con brevi pose, risultati utilitarî, sia nella germinazione, che è anticipata, come nel caso precedente, sia nella deformazione o per dir meglio deviazione dal carattere paterno che, estremamente dominante nell' ibrido normale, viene nei varî individui jonogeniti a perdere più o meno questa forza di prevalenza. Ne risulta che le singole piante dei lotti jonogeniti sono diversissime per robustezza e caratteri morfologici.

Merita menzione una pianta, nel lotto ottenuto da polline irradiato con una potente lampada Cooper-Hewitt per 10 minuti primi, che s'avvicina nel suo complesso all'albicocco. In altra pianta le foglie assomigliano, alla lunga, al ciliego.

Si è detto sopra che le semine dei lotti jonogeniti mostrano precocità di germinazione; correlativamente a questa precocità di germinazione corri-

(1) che l'aveva ottenuto parecchie anni fa prendendo come femmina il « Susino Burbank » e come maschio il « Pesco Nubiana ».

sponde una diversità del meccanismo di germinazione, consistente nella proprietà di trattenere, aderenti al fusticino, e di portare fuori terra i cotiledoni, che nell'ibrido normale - a guisa di quanto avviene nel pesco – vengono lasciati in terra; ma v'ha di più: nelle piante jonogenite, e quasi proporzionalmente alla loro modificazione (scostamento dai caratteri ♂) si ha un notevolissimo rigoglio che si mantiene e si accentua nelle piante che inizialmente erano più vegete.

Prognostici sulle attitudini fruttifere di questi ibridi bigeneri che sono soltanto al secondo anno di vita, non si possono ancora fare. È accertato che l'ibrido prodotto normalmente, cioè senza artefici jonizzanti, è sterile benchè si carichi di fiori identici a quelli del pesco.

Ma se anche la jonolisi non debellasse la sterilità, insegnerebbe una sua mirabile proprietà compensatrice per la quale alla attenuazione di dominanza, talora provvida dal punto di vista applicativo, corrisponde un utile impulso vegetativo che nell'ibridazione normale non si ottiene.

*
* *

Il problema di maggior interesse verte sul dualismo di comportamento dell'azione jonizzante, dualismo che io ritengo apparente.

Da una parte abbiamo un gruppo di fenomeni che attestano concordemente come la jonolisi e la jonizzazione del polline attenuano od annullano le caratteristiche specifiche o varietali di cui questo è normalmente portatore. Forte o prolungata jonizzazione del polline ne estingue anche la vitalità.

D'altra parte, un altro gruppo di fenomeni nei quali una appropriata e talvolta assai blanda jonolisi al polline sembra aggiungere energia alla dote energetica normale, così da vincere la riluttanza ad ibridarsi delle specie poco affini. Ed è qui, in questo apprezzamento, che c'inganniamo. Può supporsi che l'azione jonolitica, nonostante la sua alternanza propulsiva sui gruppi molecolari e correlativi campi di forza, accumuli negli elementi molecolari sessuali dell'energia supplementare? È possibile che gli elementi molecolari l'*assorbano*, trattenendola potenzialmente per devolverla poi all'atto della fecondazione, a vincere l'impedenza di compenetrazione e di collaborazione dei plasmi poco affini? Io ritengo che l'azione jonolitica sia sempre la medesima e consista, come fisicamente conviene supporre, in un allentamento dei collegamenti molecolari, con qualche lieve e superficiale trasposizione di joni, verosimilmente grossi.

Noi possiamo renderci conto del beneficio d'alleviata rigidità molecolare pensando, con *Armand Gauthier*, come gli elementi biologici dei due sessi possano paragonarsi a due parti complementari di una costruzione.

Il Gauthier paragonava molto alla buona, per i casi di possibilità d'ibridazione sessuale, gli elementi maschili e femminili a scatole e coperchi. L'ibridazione è possibile ogni qual volta un coperchio può, in qualche modo, chiudere una scatola, anche se non è proprio la sua. Ora è evidente che l'jonolisi, con l'azione allentatrice, che secondo logica le viene attribuita, renderebbe elastici i virtuali coperchi, epperò più lata la loro adattabilità.

Botanica. — *Il* virus *della malattia del giallume del baco da seta in rapporto alle moderne teorie sui* virus *filtrabili.* Nota di C. Acqua, presentata dal Socio P. R. Pirotta.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Morfologia ed Ecologia nello studio dei Petromizonti* [1]. Nota di Giulio Cotronei, presentata [2] dal Socio B. Longo.

Lo studio morfologico degli organismi animali che per lunghi anni si era rivolto, seguendo l'impulso di Gegenbaur, nel tentare i problemi della filogenesi, isterilendosi dietro i cosidetti significati morfologici, oramai si dirige verso tutt'altri indirizzi, più in armonia con le sane tradizioni sperimentali.

La morfologia funzionale con base isto–fisiologica e la morfologia sperimentale sono già da molti anni largamente coltivate e si tratta di scienze in pieno sviluppo. C'è però un altro campo della morfologia, assai meno seguito, forse perchè non può essere scompagnato dallo studio zoologico – anzi s'identifica con la zoologia – ed è la morfologia ecologica, che è assai più vasta e sintetica di tutti gli altri indirizzi, perchè può comprenderli tutti. Questa branca della biologia si avvale ugualmente dell'osservazione in natura, tenendo conto degli ambienti in cui vivono gli animali studiati, e specialmente delle variazioni ambientali che si verificano nel loro ciclo vitale e in relazione a questi fatti delle strutture morfologiche rispondenti alle disposizioni funzionali: si avvale dell'esperimento biologico, poichè deve proporsi di realizzare, se possibile, tra le complesse condizioni di vita, quelle che più direttamente influiscono sul ciclo biologico di una forma (esempi: digiuno in rapporto alla maturità sessuale, variazioni di ambienti, dal marino a quello d'acqua dolce, o dall'ambiente acqueo a quello terrestre, tro-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Siena.
(2) Nella seduta del 3 giugno 1926.

pismi, ecc.). La morfologia ecologica si avvale, inoltre, come prezioso ausilio, dell'anatomia comparata, in quanto che in molti casi l'analisi comparativa tra forme viventi in ambienti diversi fa discernere sull' importanza dei fatti morfologici, e si riallaccia alla fisiologia in quanto riesce a mettere in evidenza importanti problemi fisiologici, che aspettano la verifica analitica.

Mi è sembrato opportuno richiamare questi concetti, in quanto essi mi hanno guidato nelle mie indagini sui Petromizonti. Nello studio di questo gruppo l'indirizzo morfo-ecologico ha modo di palesare tutta la sua importanza, forse più che in altri gruppi di vertebrati. Ma tale studio se si rende tanto più proficuo quanto più esso si informa a criteri generali, non deve, tuttavia, perdersi dietro impostazioni vaghe e generiche; ma il valore del metodo, in questo, del resto, come in ogni altro indirizzo di studio sperimentale, si palesa solo quando i quesiti della indagine si coordinano in maniera limpida e concreta nella finalità della ricerca. E dicendo criteri generali, io dico ancora, nel caso in esame, che i Petromizonti non possono essere studiati in una sola forma (di proposito adopero questa parola invece di « specie »); e ciò sia per la questione zoologica sull'esistenza di una o più specie, e sia perchè si hanno condizioni ecologiche differenti; onde i caratteri di una singola forma tanto meglio si delineano quanto più essi si osservano nei reciproci confronti.

Già da alcuni anni ho impostato le mie ricerche sui Petromizonti su questi criteri. Vedo ora che essi sono seguiti anche da Weissenberg il quale pare non sia ancora a conoscenza dei miei lavori.

Problemi di grande interesse sulla biologia dei Petromizonti sono quelli riguardanti le fasi di metamorfosi e quelli di maturità sessuale. Lo studio del solo *Petromyzon Planeri* aveva a tal proposito fatto ingenerare non poca confusione, confondendosi, cioè, fenomeni riguardanti l'una fase con quelli dell'altra e questo perchè nel *P. Planeri* le due fasi si succedono: la metamorfosi segna il limite dell'accrescimento corporeo, in quanto l'animale smette di nutrirsi e senza più riprendere nutrimento raggiunge la maturità sessuale che culmina nella morte. È noto che tutta la vita del *P. Planeri* si svolge nei piccoli corsi d'acqua dolce, ed è interessante la constatazione della relazione esistente tra la costanza dell'ambiente e la successione in condizione di digiuno tra la metamorfosi e la maturità sessuale, relazione questa che non esiste nel *P. fluviatilis* e nel *P. marinus*, che in un periodo della loro vita, prima della maturità sessuale, vanno al mare, e si nutrono, per poi, più tardi, risalire i fiumi anche loro in condizione di digiuno, e divenire così sessualmente maturi.

Vi sono condizioni peculiari che si stabiliscono in alcuni organi ed è importante constatare le relazioni di adattamento o di degenerazioni con le varie condizioni ecologiche. È già noto che con la metamorfosi il fegato perde la canalizzazione biliare, si atrofizza il coledoco e la vescicola biliare.

Le mie ricerche ecologiche e morfologiche hanno dimostrato che nel *Petromyzon fluviatilis* e nel *P. marinus* la profonda atrofia dell'intestino è in rapporto con la maturità sessuale; risulta così che le degenerazioni dell'intestino non sono correlative all'atrofia delle vie escretrici del fegato. Su questa constatazione, e meglio ancora, sui fatti e le considerazioni che ne scaturiscono, è imperniato lo scopo della presente Nota.

In un recente lavoro (1), con tutt'altro scopo, il Diamare accennando incidentalmente alle questioni riguardanti il fegato dei Petromizonti fa una osservazione che mi sembra molto acuta: osserva che nel fegato « la funzione endocrina prevale al punto che ci è agevole riguardare la funzione esocrina come un corollario della endocrina. La secrezione esterna consiste in realtà nel rigetto e nel drenaggio attraverso il sistema biliare, dei rifiuti del ricambio materiale epatico (bile) ossia della sua funzione renale » e ricorda che nei Petromizonti all'epoca della trasformazione degli *Ammocoetes* il fegato perde i suoi rapporti con l'intestino per atrofia del coledoco e tuttavia continua la funzione biliare (emuntica) tanto che Kuliabko ha potuto dimostrare la presenza di bile nell'intestino.

Nelle mie ricerche sul *Petromyzon fluviatilis* e sul *P. marinus* ho potuto mettere insieme dei fatti che tendono a mettere in risalto qual'è il momento biologico in cui la bile non può arrivare nell'intestino. Sta di fatto che le forme adulte (ma non ancora mature sessualmente) pur presentando la perdita delle vie escretrici del fegato non mostrano nessuna traccia di atrofia in questo organo (epitelio epatico). Il fegato rimane organo intensamente funzionante. Ciò è in accordo con quanto si può presumere, poichè dopo la metamorfosi le due forme sopra elencate continuano a nutrirsi e poichè le funzioni digestive si sono già svolte in armonia a *differenziamenti organici già stabiliti*, non può stupire che nei casi in esame si stabiliscano degli adattamenti tali da permettere la continuazione della funzione *già prima esistente*.

Con ricerche sistematicamente condotte, controllate con esperienze di laboratorio su animali tenuti in vasca fino all'assunzione dell'abito di nozze e alla morte, venni alla conclusione che il *Petromyzon fluviatilis* smette di nutrirsi nel viaggio di montata, quando risale i fiumi per la maturità sessuale. L'osservazione positiva, che, confortata da quelle successive nel digiuno, mi permise una simile conclusione fu, aggiungo ora, una sola mia personale. Trovai in quattro anni di ricerche un solo esemplare di *P. fluvialilis* che avesse l'intestino pieno di piccolissimi pesci. Questo esemplare proveniva da Fiumicino, pescato a mare (nel 1922). Il prof. Tagliani mi ha riferito verbalmente di avere avuto altri casi consimili in esemplari (due o tre) pescati nel Golfo di Gaeta. Di qualche altro caso, sempre nel *Petromyzon fluviatilis* vien riferito nella recente Nota di Weissenberg. Sta però, di fatto,

(1) Diamare Vincenzo, *Distrofie e degenerazioni istofisiologiche genitali*, « Archivio di Ostetricia e Ginecologia », vol. 9, 1921, p. 440.

che nel complesso si tratta di osservazioni rare, ciò che forse è in rapporto alle particolari condizioni biologiche in cui vive, nel mare, il *Petromyzon fluviatilis*. Per il *Petromyzon marinus* le mie osservazioni personali sul viaggio di montata (digiuno) e quelle di controllo in vasca fino alla maturità sessuale mi hanno condotto a ritenere identica la biologia di queste due forme.

Dunque dopo la metamorfosi i Petromizonti che vanno al mare hanno un periodo di vita in cui si nutrono: ci è ignoto però quanto duri questo periodo; poi subentra il digiuno, con cui s' inizia la fase preparatoria della maturità sessuale. Nei *Petromyzon fluviatilis* esaminati in tali condizioni mi è stato dato di osservare nell' intestino delle zone di pigmento verde, come si ottiene in altri animali a digiuno [1], e che rivelano la presenza di bile nell' intestino. Nella maturità sessuale è dato notare che il fegato, in molti esemplari in maniera assai spiccata, assume un color verde malachite; in tutti questi casi l' intestino presenta il massimo dell'atrofia: è importante tener presente che la pelle dell'animale cambia colore, pigliando un aspetto tendente al giallo-oro.

Un' identica osservazione fatta sul fegato dell'esemplare di *Petromyzon marinus* da me ottenuto in istato di maturità sessuale, m'ha spinto a voler rendermi una ragione di questi fatti: ho voluto cominciare a rendermi conto del perchè, anche nel *P. marinus*, il fegato nella maturità sessuale aveva cambiato di colore, divenendo verde malachite. L'esame istologico dimostra che con la profonda atrofia dell' intestino si ha strozzamento dei vasi e disintegrazione di corpuscoli sanguigni: ed è in rapporto a questi fenomeni di atrofia che, secondo me, viene ostacolato il deflusso della bile nell' intestino; infatti, l'esame istologico del fegato mi ha rivelato: 1° una grande quantità di pigmento, nella trama interstiziale, dovuta ad intensa disintegrazione di globuli rossi; 2° nelle cellule epatiche si nota una forte presenza di granuli di pigmento in maniera tale che si può dire che tutto il citoplasma ne risulta cosparso. Che cosa significano questi fatti? Szutinscki [2] ha descritto il processo di infiltrazione pigmentaria che avviene nelle cellule epatiche per il ristagno di materiali biliari dopo la legatura del coledoco: ossia quando viene sperimentalmente impedito il deflusso della bile; i fatti da me riscontrati dimostrano un medesimo effetto che a me sembra palese sia dovuto a una medesima causa. Se pensiamo poi, a quanto ho dianzi ricordato, ossia all' intensa distruzione di globuli rossi, che si verifica nell'ultima fase di vita, fase d' intensa atrofia organica, dobbiamo riconoscere che questo fatto può avvalorare il sospetto che soltanto in questa fase si verifichi una condizione d' itterizia. Ho detto poi che l'animale assume, in questo tempo, un colorito giallo-oro: anche per tale constatazione vien fatto di

(1) Si sa che nel digiuno la bile mentre diminuisce di quantità aumenta di concentrazione.

(2) Si consulti Lustig e Galeotti, *Trattato di patologia generale*. Sesta ediz., vol. I, 1923, p. 936.

dedurre che le complesse modificazioni pigmentarie che traggono origine dalle condizioni stabilitesi nel fegato influiscono sulla nuova colorazione della pelle.

I fatti e le considerazioni ora esposte vogliono essere messi in rapporto con le mie ricerche sul pancreas dei medesimi animali di studio. Le condizioni ora esaminate del fegato possono da un punto di vista teorico trovare un possibile riscontro nella condizione del pancreas? La risposta è nettamente negativa. Il fegato presenta sempre in tutta la serie dei vertebrati una sola differenziazione cellulare specifica: la cellula epatica, che presiede ugualmente alla funzione esocrina e a quella endocrina, che sono strettamente, così, collegate nella stessa unità morfologica; nel caso dei Petromizonti si ha che differenziatasi la funzione esocrina del fegato questa si esplica, come di regola, per tutto il periodo biologico che corrisponde alla fase di Ammocete, attraverso un proprio sistema escretore che sbocca nel coledoco e quindi nell'intestino; soltanto più tardi, e questo coincide nel *Petromyzon Planeri* (forma che io considero punto di partenza per le altre due da me studiate) col fatto che l'animale smette definitivamente di nutrirsi, che il fegato perde i suoi rapporti con l'intestino, quasi a significare la inutilità, oramai, della funzione digestiva dell'organo. E se le mie osservazioni odierne, sul *Petromyzon fluviatilis* e sul *Petromyzon marinus*, convalidano l'opinione che il fegato in queste forme continua a versare la bile, ciò è perchè queste due forme, che continuano a nutrirsi [1], per adattamenti secondari alle trasformazioni morfologiche delle vie escretrici del fegato debbono esplicare quelle medesime funzioni digestive per cui tale organo era stato già funzionante durante il periodo di Ammocete. Vediamo, invece, qual'è la condizione del pancreas. In tutta la serie di altri vertebrati appena le funzioni esocrina e endocrina sono stabilite, esse sono disimpegnate da elementi morfologici differenti, che possono anche non essere associati nello stesso organo (Teleostei). Inoltre le due funzioni, esocrina e endocrina, non soltanto non sono collegate, ma dal punto di vista chimico si sa che i prodotti della secrezione esocrina possono neutralizzare quelli della secrezione insulare, e ciò spiega l'inutilità degli estratti di pancreas in toto, come è poi risultato dagli studi sull'insulina. Nel caso dei Petromizonti, *mai* è risultato che i costituenti pancreatici presentino vie escretrici comunicanti con l'intestino. Già per questo fatto la differenziazione esocrina, qualora esistesse, non corrisponderebbe alla condizione del fegato; ma può *differenziarsi* una funzione esocrina senza il differenziamento delle vie di emissione? In via teorica dobbiamo escluderlo, cadendo, come abbiamo visto, anche ogni possibile analogia con la condizione del fegato; in via obbiettiva il lungo lavoro analitico da noi compiuto sul pancreas dei Petromizonti dimostra che esiste un solo tessuto glandulare nel pancreas, quello insulare.

(1) Questo non esclude che tali adattamenti possano avere il loro inizio nel *Petromyzon Planeri*.

Biologia. — *Su alcune reazioni a stimoli luminosi e loro probabile rapporto a dispositivi morfologici nei salmonidi in via di sviluppo* [1]. Nota del dott. Ettore Remotti, presentata [2] dal Corrisp. Ercole Giacomini.

È nota tutta l'importanza che i colloidi hanno nelle manifestazioni degli esseri vivi. La uniforme, costante loro presenza in tutti gli organismi, in confronto alla variabilità dei componenti cristalloidi, ce li indica infatti, già senz'altro, come il substrato fondamentale delle manifestazioni vitali, sia che il sistema colloidale protoplasmatico lo si voglia paragonare agli emulsoidi di Ostwald, sia che, con Bottazzi, lo si consideri piuttosto come un sistema omogeneo, lipoproteico, a dispersione molecolare, nel quale però le manifestazioni vitali sarebbero legate alla sua capacità di trasformarsi in modo reversibile in un sistema eterogeneo polifasico, per formazione di aggregati micellari variati, modificando così, col vario sviluppo della superficie adsorbente di separazione fra le due fasi, la velocità di sviluppo delle reazioni chimiche. Non occorre ricordare qui come tale condizione, mentre, da un lato, ci darebbe ragione della contemporaneità, nell'ambito limitatissimo della cellula, di svariate e complesse reazioni, d'altro lato poi, per la sua reversibilità fisica, realizzerebbe quella reversibilità fisiologica che è la base dei fenomeni della vita.

In rapporto a tutto ciò le variazioni del grado di dispersione del colloide protoplasmatico starebbero in stretta dipendenza con le condizioni fisiologiche cellulari: più o meno omogeneo nel periodo di riposo, esso presenterebbe nello stato di eccitamento un alto contenuto di granulazioni, vale a dire di fase dispersa, indizio di un elevato potenziale funzionale. D'altro lato, pur nella limitazione che la teoria colloidale dei fenomeni immunitari vien via via subendo, in quanto insufficiente a spiegarci alcune fra le più importanti loro modalità, le leggi dell'assorbimento e quindi le condizioni di dispersione, sembrano tuttavia presiedere allo svolgimento dei fenomeni relativi alla agglutinazione, come anche influire direttamente sull'attività complementare dei sieri. Complessivamente questo insieme di fatti tenderebbe a farci vedere, nelle condizioni fisico-chimiche dei liquidi organici, i fattori di garanzia e di difesa contro minaccie esogene ed endogene, e nella loro permanenza come nelle loro eventuali modificazioni il substrato di reazioni difensive da parte dell'organismo.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Bologna, diretto dal prof. E. Giacomini.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1926.

Sulla base appunto di tali considerazioni mi è sembrato interessante ricercare se anche alcune almeno delle azioni, che la luce esercita sugli esseri vivi, possono trovare il loro meccanismo in variazioni dell'equilibrio fisico-chimico dei colloidi protoplasmatici e se anche in tali variazioni non fosse da ricercarsi un eventuale mezzo di difesa messo in giuoco da parte degli organismi.

Metodo di ricerca. - Il problema era dunque di trovare un metodo che potesse servire da indicatore delle condizioni di equilibrio salinoproteico dei colloidi protoplasmatici e del loro grado di dispersione.

Le ricerche che si svolgono nel laboratorio del prof. Giacomini sulla reazione di Kottmann [1], ci fornirono in quest'ultima, opportunamente modificata, il metodo desiderato, tanto più interessante per la questione propostaci, in quanto essa è una reazione fotosierologica, che, sulla base del metodo fotografico (reazione dei sali d'argento alla luce, e successivo viraggio) e di quanto è noto del processo di maturazione della gelatina, queste condizioni colloidali saggia nei riguardi del loro comportamento alla luce, considerata quale agente di reazioni chimiche.

Il cosidetto processo di maturazione, col quale è strettamente connesso il grado di fotosensibilità della lastra, il che val quanto dire la sua rapidità di reazione sotto l'azione della luce, sembra, difatto, legato a un aumento di dimensioni delle micelle del colloide costituente la gelatina e quindi a una diminuzione della sua dispersità.

Sulla base di questo dato di fatto il Kottmann, sostituendo ai comuni geli fotografici i colloidi dei liquidi organici, assumeva la velocità del successivo viraggio come indice della dispersione dei colloidi stessi.

La reazione, inizialmente concepita con uno scopo clinico, come mezzo indicatore, fra l'altro, di stati tiroidei, fu successivamente modificata in questo laboratorio, sia variando la proporzione dei reattivi, sia usando per controllo, secondo l'indicazione del prof. Giacomini, albumine pure ecc.; e, qualunque possa essere il suo intimo meccanismo, lo studio del suo comportamento ci ha dimostrato come esso sia fondamentalmente in funzione dei proteici, dei sali presenti nel siero e dello stato colloidale del siero stesso.

Oggetto delle nostre ricerche furono gli avannotti di *Salmo lacustris L.*

Il materiale, cortesemente fornito dal prof. Lo Giudice, direttore del R. Stabilimento Ittiogenico di Brescia, e mantenuto nei nostri appositi recipienti d'incubazione, veniva diviso in due lotti allevati in condizioni ambientali identiche (due cassettine a fondo bianco situate nella medesima stanza, irrigate da quantità eguali di acqua distribuita dalla medesima conduttura), salvo che l'una, mantenuta al fondo di una più ampia vasca e protetta da apposito schermo, veniva a trovarsi in condizioni di oscurità, mentre l'altra era direttamente esposta ad illuminazione continua con lampada di 100 can-

(1) De Castro, «R. Acc. Lincei», anno CCCXXIII, 1926.

dele a una distanza di 25 centimetri. L'esperienza fu seguita, prelevando ogni 24 ore dai due lotti egual numero di avannotti, sui quali procedevasi alla reazione, utilizzando, come siero, il prodotto ricavato dalla sezione dell'embrione secondo un piano trasversale passante per il centro del sacco vitellino. Tale operazione veniva compiuta in acqua lievemente alcalinizzata.

Trattandosi di mettere in evidenza, attraverso una diversa rapidità del successivo viraggio con l'idrochinone, eventuali differenze fra i sieri tenuti al buio e quelli preventivamente irradiati, ho creduto conveniente, in base ai risultati di numerose determinazioni, di modificare alquanto il procedimento originale della reazione, abbreviando il periodo d'esposizione dei sieri fotografici così preparati, che, per una troppo lunga azione della luce, tenderebbero altrimenti ad eguagliarsi. L'*optimum* delle condizioni sperimentali che abbiamo potuto verificare, riduce tale periodo a un minuto, per una lampada di 1000 candele, a una distanza di 40 centimetri.

Risultati. – Operando secondo il procedimento sopra descritto si è potuto osservare una netta differenza di comportamento fra le due categorie di sieri, in quanto quelli di avannotti allevati sotto l'azione della luce, virano con l'idrochinone assai meno rapidamente: quando i provenienti dall'oscurità hanno già raggiunto il caratteristico colore indiscutibilmente positivo, nei primi la reazione ancora non compare o è appena al suo inizio. In alcuni casi, oltre che per la diversa velocità, le due categorie di liquidi si differenziano per l'intensità del colorito, anche a reazione ultimata, differenza quest'ultima non facilmente spiegabile.

A prescindere da quello che possa essere il meccanismo della reazione, i risultati delle esperienze ci indicano dunque evidentemente, in primo luogo, un dato già particolarmente interessante: una modificazione nelle condizioni dell'equilibrio salino proteico sotto l'azione della luce.

Secondariamente, la modificazione è tale da diminuire la velocità di reazione per i sali fotografici che possono trovarsi legati con colloidi del siero, conferendo quindi a questi ultimi proprietà fotoresistenti o fotoprotettive e se, come appare logico, tali proprietà verso i sali di argento si devono estendere anche agli altri costituenti normali, che possono in qualche modo (forse in combinazione di adsorbimento) legarsi ai colloidi dei sieri, si potrebbe realmente parlare di una variazione intesa ad opporsi a quella accelerazione delle reazioni, che è uno degli effetti chimicamente e biologicamente noti della luce. Saremmo in tal caso di fronte a una reazione di carattere difensivo messa in giuoco dall'organismo.

Ricordo, in proposito, come già le ricerche di Moleschott e Fubini [1], ci dimostrarono, attraverso un aumentato consumo di ossigeno e produzione di CO_2, come la luce intensifichi il ricambio della materia con un'azione che, manifestandosi anche in animali privati del sistema nervoso, devesi ritenere si svolga direttamente sul protoplasma.

(1) Moleschott e Fubini, «Atti R. Accademia Scienze di Torino», 1879.

Dinanzi a questi esempi che ci attestano l'importanza dell'azione luminosa come stimolatrice dei fenomeni catabolici, azione che diviene tanto più intensa in presenza di sostanze fotodinamiche funzionanti da sensibilizzatori, particolare interesse ci sembra acquistino le modificazioni rivelate dalla presente reazione, per il loro evidente significato di difesa. Con essa l'organismo manifesterebbe, come per altre reazioni, un comportamento che potrebbe, col Bohn, considerarsi una sorta di estensione, alle reazioni biologiche, del principio di Le Châtelier: la tendenza cioè di un sistema a mantenere il proprio equilibrio, per cui ogni modificazione in un senso sarebbe, più o meno rapidamente, seguita da una modificazione contraria, che tende ad opporsi alla prima.

Se ora noi ci riconduciamo al processo di sensibilizzazione delle gelatine fotografiche, la modificazione descritta sembrerebbe potersi riferire a una omogeneizzazione del colloide lipoproteico in esame. Chè, se si considera l'importanza della eterogeneità dei sistemi colloidali degli esseri vivi in relazione alla concentrazione per adsorbimento, sulla superficie delle particelle disperse, dei componenti dei sistemi stessi, e quindi all'intensità dei fenomeni interfaciali, una diminuzione della fase granularmente dispersa, in favore della fase omogenea con dispersione molecolare, potrebbe spiegarci, attraverso la diminuzione della superficie divisoria tra le due fasi, anche una diminuzione della velocità delle reazioni chimiche. Nota a questo riguardo il Bottazzi [1] come, mentre nel periodo di maggiore attività funzionale la cellula si presenta più ricca di granulazioni, i sistemi fisiologicamente e metabolicamente meno attivi siano poi quelli risultanti di colloidi più omogenei, la omogeneizzazione in genere potendosi considerare connessa con una condizione di riposo fisiologico.

La reazione è reversibile e si accelera con l'elevarsi della temperatura ambiente: riportati all'oscurità, gli avannotti, in poche ore, ritornano alle condizioni dei controlli, salvo a richiedere il medesimo tempo che i normali per una nuova reazione, se successivamente esposti una seconda volta alla luce. Il fenomeno, che, nell'ipotesi di un processo di omogeneizzazione, troverebbe la sua base fisica nel lavoro compiuto dall'energia luminosa contro la tensione superficiale con conseguente accumulo di energia potenziale di superficie, presenterebbe però, nel suo andamento, tutte le caratteristiche di una reazione biologica, inquadrandosi, con la sua tipica reversibilità, nelle linee generali del processo d'azione degli stimoli fisiologici.

*
* *

Complessivamente quindi, a prescindere da quanto può essere interpretazione del meccanismo dei fenomeni osservati, il risultato fondamentale è

(1) Bottazzi, Atti Società per il progresso delle Scienze, 1923.

in ogni modo costituito da una variazione di equilibrio interno, con la quale il protoplasma risponde all'azione dello stimolo luminoso, per essa divenendo la sede di funzioni fotodifensive, indipendenti dalla differenziazione di organi speciali, a queste, almeno apparentemente, destinati. Per tal modo il protoplasma stesso troverebbe nei suoi processi fisico-chimici la possibilità di realizzare adattamenti fotoprotettivi che, per avere la loro base nella sua intima architettura, non sarebbero rilevabili coi comuni metodi di ricerca morfologica. Tale reazione potrebbe anzi acquistare particolare interesse, come meccanismo di difesa in tutte quelle forme nelle quali non troviamo ancora, morfologicamente differenziati, alcuni di quei dispositivi che sembrano avere una funzione protettiva in rapporto alla luce: in molte forme embrionali, cioè, nelle quali una funzione fotoprotettiva dovrebbe presumibilmente essere tanto più necessaria quanto più labili e delicati devono essere in questi primi momenti i processi vitali; e in molti organismi planctonici che non presentano, a prescindere dalla loro caratteristica trasparenza, meccanismi visibili di difesa contro l'intensa illuminazione a cui sono esposti e alle estese variazioni di questa.

Così modificazioni fisico-chimiche, come quelle più sopra messe in evidenza, potrebbero da sole rappresentare un substrato su cui s'impernia la reazione fototropica, secondo i concetti di Loeb, senza perciò la necessità di ammettere una particolare sostanza fotoreattiva, i colloidi stessi protoplasmatici presentando tale caratteristica sensibilità.

Su questa via verremmo involontariamente a trovarci in queste forme, di fronte a un nuovo aspetto del problema dei cromatofori, che, come è noto, è ancora così pieno di incognite: aspetto che tenderebbe a metterli in rapporto collo stato di dispersione dei colloidi organici dinnanzi alle perturbazioni degli stimoli termici e luminosi.

Se, infatti, nel loro funzionamento, accanto allo stimolo, luminoso devesi ritenere entri in giuoco anche la temperatura, l'uno come l'altra potrebbero, forse, agire attraverso le modificazioni dell'equilibrio salinoproteico che dall'uno come dall'altra, secondo quanto dalle presenti esperienze risulta, sembra possano essere indotte sui protoplasmi. Per tal maniera si potrebbero conciliare le diverse vedute che considerano questi organi ora quali reattivi luminosi ora quali reattivi termici, per i quali, in ogni modo poi, finora nulla si sa circa il punto, o i punti, d'insorgenza dello stimolo. E, ove si possa realmente dimostrare l'esistenza di un centro cromato-coscrittore [Frisch] [1], non sarebbe da escludere che fossero tali modificazioni appunto ad agire su di questo o su di un anello della complessa, e non sempre armonica, catena delle reazioni presentate dai cromatofori.

(1) Frisch, «Pflüg. arch. ges. Physiol.», Bd 138, 1911, «Biol. Centralbl.», Bd, 31, 1911. Arcangeli, «Boll. Ist. Zool.», Roma, 1923.

G. C.

INDICE DEL VOLUME III, SERIE VI. — RENDICONTI

1926

INDICE PER AUTORI

A

Abetti G. — « Sull'altezza della cromosfera solare ». 140.

Id. — « Sulla struttura della riga Hα nella cromosfera solare ». 568, 594.

Acqua C. — « Il *virus* della malattia del giallume del baco da seta in rapporto alle moderne teorie sui *virus* filtrabili ». 767.

Adinolfi E. — « Sullo spettro di assorbimento dei permanganati di K e Ca ». 196.

Angeli A. — « Una pretesa priorità a proposito della conducibilità delle catene non sature ». 371.

Id. — « Sopra le anomalie di alcune reazioni ». 450.

B

Baglioni S. — Commemora il Socio professore Aristide Stefani. 433.

Barbieri U. — « Determinazione astronomica di latitudine e azimut eseguita a Capo Noli nel 1911 ». 554, 607.

Belluigi A. — « Valutazione dello smorzamento nei pendoli sismografici ». 691.

Bemporad G. — « Sul principio della media aritmetica ». 87.

Id. — Circa un nuovo metodo di studio sui risultati di esperienza ». 189.

Bemporad G. — « Sul catalogo astrografico di Catania ». 520, 639.

Bernstein V. — « Sulla unicità delle funzioni interpolari soddisfacenti a certe condizioni asintotiche ». 540.

Id. — « Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano ». 583, 732.

Bertolini F. — « Conformazione dello stomaco dei Pesci Teleostei in rapporto con la nutrizione ». 692.

Bianchi. — Comunica una commemorazione del Corrisp. Antonio Antoniazzi. 701.

Boggio T. — « Sullo scostamento geodetico ». 749.

Bompiani E. — « Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane ». 118.

Id. — « La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato ». 395.

Bordoni U. — « Sulla trasmissione di calore per irradiamento ». 410, 554.

Bruni G. e Ferrari A. — « Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti ». 720.

Burgatti P. — « Sulle distorsioni elastiche ». 513.

Burzio F. — « Alcune nuove proprietà della precessione balistica ». 554, 599.

Id. — « Sulla legge di Mayevski per la pressione balistica ». 679, 737.

Id. — « Ordine di grandezza delle quantità relative al 2° problema balistico ». 749.

C

Caglioti V. — « Un nuovo esempio di cristalli misti anomali ». 332.

Cambi L. — « Su un preteso nitroprussiato del ferro bivalente ». 8.

Cantone M. — « Risposta ad una critica ». 370, 524.

Carobbi G. — « Sulla composizione chimica dell'ortite di Ambatofotsikely (Madagascar) ». 206.

Carozzi E. — « Sopra una spessartina cromifera di St.-Barthélemy (Valle d'Aosta) ». 230.

Carrelli A. — « Sull'effetto fotoelettrico composto ». 82.

Cartan F. — « Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure ». 544.

Castelnuovo (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Socio Fantoli, del Corrispondente Loria, del prof. O. de Buen, di J. Berzelius. 44.

Id. — Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Corrispondente U. Cisotti, di P. Ginori-Conti e di un volume dedicato al prof. Hantaro Nagaoka nel 35° anno d'insegnamento. 171.

Id. — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Corrispondente Sacco e del Socio Grassi. 444.

Id. (Relatore). — Anche a nome del Corrisp. F. Severi, riferisce favorevolmente per l'inserzione nei volumi accademici della Memoria: « Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 e una notevole configurazione di rette nello spazio ordinario » di B. Segre. 570.

Id. (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Corrisp. A. Castellani e di Wilson Taylor. 570.

Id. — Fa omaggio del vol. I della nuova edizione del suo trattato del « Calcolo delle probabilità » dandone notizia. 570.

Id. — Presenta, perchè sia sottoposta ad esame, la Memoria di F. Ranfaldi intitolata: « Sullo zolfo rombico dell'isola di Vulcano (Eolie). 701 ».

Castelnuovo (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle dei Soci Silvestri e Fantòli. 701.

Cavara F. e Chistoni A. — « La ibridazione nel "Papaver somniferum L." in relazione al titolo di morfina dell'oppio ». 113.

Cerulli V. — Si associa al Presidente per lamentare la perdita del Corrisp. Antoniazzi e del dott. Eugenio Padova. 44.

Chiarugi A. — « Fenomeni di aposporia e di apogomia in "Artemisia nitida Bertol." ». 281.

Chistoni A. — Vedi Cavara F.

Cisotti U. — « Azioni meccaniche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro ». 53.

Id. — « Risoluzione dei problemi armonici in un'area piana indefinitamente con n lacune circolari di piccolo diametro ». 184.

Id. — « Campo elettrostatico dovuto a un qualunque numero di sottili conduttori elettrizzati di forma cilindrica ad assi paralleli ». 289.

Id. — « Effetti dinamici di un fluido che circola tra quantisivogliano cilindri sottili ad assi paralleli ». 517.

Colucci A. — « Su di una presunta proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine ». 376.

Comucci P. — « Osservazioni sulla vulfenite e vanadinite di Oudida (Marocco) ». 335.

Corbino O. M. — « Sulla teoria elettronica dei fenomeni termomagnetici ». 3.

Id. — « I fenomeni magneto-ottici nei campi rapidamente variabili ». 173.

Id. — « Ancora sulla teoria elettronica dei fenomeni termomagnetici ». 250.

Id. — « Sulle frange di Perot e Fabry prodotte con una lamina birifrangente semiargentata ». 370, 573.

Id. e Levi-Civita T. — « Il principio di Doppler e la ipotesi balistica della luce ». 644, 705.

Cotronei G. — « Sulla biologia dei Petromizonti. - III. Il fenomeno dell'accorciamento nella maturità sessuale del " Petromyzon marinus " ». 37.

Id. — « Cordoni oscuri e cordoni chiari nell'organo insulare di " Petromyzon marinus " ». 428, 503.

Id. — « Morfologia ed Ecologia nello studio dei Petromizonti ». 767.

Crocco G. A. — « Possibilità di superaviazione ». 241, 363.

Id. — « Un paradosso del propulsore a reazione ». 370.

Crudeli U. — « Sui modelli dell'atomo d'elio ». 565, 666.

Cumin G. — « Osservazioni sull'isola di Asinello e sugli scogli vicini (Carnaro) ». 419, 494.

D

D'Achiardi G. — Vedi Millosevich F.

D'Ancona U. — « Contributo all'istofisiologia della fibra muscolare striata ». 284.

De Castro U. — « Condizioni fisico-biologiche e determinismo della reazione di Kottmann ». 159.

Del Regno W. — « Sul comportamento del Selenio sottoposto all'azione delle radiazioni del Mesotorio ». 201.

De Mottoni G. — « Un nuovo metodo per la misura di distanze dei reticoli di diffrazione ». 686, 750.

Des Lauriers M. G. — « Sul problema del Dini ». 302.

Id. — « Sugli spazi geodeticamente applicabili all'infuori del caso Dini ». 383.

D'Ovidio E. — Come presidente della seduta, comunica che assiste alla seduta il prof. Finnikoff dell'Università di Mosca. 701.

E

Enriques F. — Fa omaggio della prima traduzione di J. Newton fatta in collaborazione di N. Forti e di un lavoro di E. Rufini. 45.

F

Fabiani R. — « Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio (Palermo) ». 568, 612.

Fadda G. — « Di un caso di rigenerazione funzionale in " Cyprinodon calaritanus C. V. " ». 40.

Fantappiè L. — « Determinazione dei gruppi a un parametro di funzionali lineari ». 378.

Id. — « I funzionali analitici non lineari ». 529.

Fano G. — « Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari ». 639.

Fermi E. — « Sulla quantitazzione del gas perfetto monoatomico ». 145.

Id. — « Sopra l'intensità delle righe proibite, nei campi magnetici intensi ». 478.

Ferrari A. — « L'esame röngtenografico dei reticoli cristallini del fluoruro manganoso e del biossido di manganese ». 224.

Id. — « La struttura cristallina di alcuni fluoruri di metalli bivalenti. FeF_2, CoF_2, NiF_2 e ZnF_2 anidri ». 324.

Id. — « Confronto fra i diametri di ioni dello stesso elemento, ma aventi cariche diverse ». 275.

Id. — Vedi Bruni G.

Finzi B. — « Moti spaziali vorticosi in corrispondenza univoca con traslazioni uniformi ». 130.

Franchi S. — « Le scoperte di foraminifere priaboniane nelle " arenarie di Taveyannaz " confermanti l'età eocenica delle " arenarie di Annot ", dimostrata nel 1916 ». 60.

Id. — « Passaggi graduali a forme cristalline, calcescistose e marmoree, del Nummulitico e del Cretaceo fossiliferi, nelle Valli del Gesso e della Stura di Cuneo ». 257.

Id. — « La continuità di alcune zone dell'Eocene dalle Alpi Marittime all'Appennino Ligure e l'età delle argille scogliose ». 375.

Freda E. — « Sulla propagazione di correnti stazionarie sotto l'azione di un campo magnetico ». 77.

G

Garbasso (relatore). — Anche a nome del Socio Corbino, riferisce favorevolmente per la inserzione nei volumi accademici sulla Memoria: « L'interferometro oculare e l'interferometro obiettivo nella risoluzione delle stelle doppie » del dott. Vasco Ronchi. 171.

Gorini C. — « Sulla microflora del silò italiano ». 569, 629.

Graffi D. — « Ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento ». 28.

Gravino P. — « Sull'antimonite di Wolfsberg (Harz) ». 210.

Guidi C. — Offre una sua Nota: « Una questione di priorità ». 171.

H

Haardt R. — Vedi Levi R. G.

Hagen G. — Offre il vol. VIII del « Catalogo astrografico » pubblicato dall'Osservatorio Vaticano. 45.

Id. — Fa omaggio del 2° fascicolo del « Catalogo delle Nebulose ». 288.

Hlavatý V. — « Les paramètres locaux dans une variété de Riemann ». 737.

Horn D'Arturo G. — « Sulla teoria delle ombre volanti ». 554, 591.

J

Jucci C. — « La partenogenesi nei bachi da seta come esponente delle capacità fisiologiche individuali e di razza ». 32.

Id. — « La capacità di partenogenesi delle uova di seconda generazione di razza bivoltina di bachi da seta ». 350.

K

Kolmogoroff A. e Seliverstoff G. — « Sur la convergence des séries de Fourier ». 307.

Krall G. — « Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico ». 679.

Krall G. — « Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico ». 744.

L

Lampariello G. — « Sulle superficie continue che ammettono area finita ». 294.

Lazzarino O. — « Sulla generalizzazione di una notevole formula di Joukovsky nel moto per inerzia di un giroscopio semirigido ». 298.

Levi R. G. e Haardt R. — « L'azione catalitica dei metalli del gruppo del platino e il loro grado di suddivisione ». 91.

Id. — « L'azione catalitica dei metalli del gruppo del platino e il loro grado di suddivisione ». 215.

Levi-Civita T. — Commemora il Socio Gregorio Ricci-Curbastro. 44.

Id. — Per incarico dell'autore, il Corrispondente C. Guidi, fa omaggio della 2ª edizione del volume intitolato: « Statistica delle dighe per laghi artificiali ». 570.

Id. — « Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione ». 714.

Id. — Vedi Corbino O. M.

Levy H. — « Forma canonica dei ds^2 per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici ». 65.

Id. — « Sopra alcune proprietà degli spazi per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici ». 124.

Id. — « Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica ». 737.

Lugaro G. — « Sulla Bismutinite di St. Agnes (Cornovaglia) ». 416.

M

Marchiafava E. — Commemora il Socio Guido Banti. 44, 103.

Marinelli. — Commemora il Socio straniero Giorgio Augusto Schweinfurth. 701.

Masotti A. — « Rotazione uniforme di un solido cilindrico in un liquido perfetto indefinito. Estensione del teorema di Kutta e Joukowski ». 233.

Masotti A. — « Una estensione delle formule del Blasius ». 403, 472.

Mazet R. — « Sur les oscillations d'un liquide en vases communicants ». 554, 673.

Millosevich F. — Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando il « Discorso commemorativo del prof. *A. Peratoner* », pronunciato dal sen. Piero Ginori Conti. 288.

Id. (Relatore). — Anche a nome del Corrisp. G. D'Achiardi, riferisce favorevolmente per l'inserzione nei volumi accademici della Memoria: « Osservazioni sui pirosseni di Campiglia Marittima (Toscana) », del prof. P. Aloisi. 443.

Id. — Vedi Zambonini F.

Minetti S. — « Sulla ricerca delle singolarità delle $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n Z^n$ ove $a_n = g(n)$ per n intero positivo con $g(n)$ trascendente intero ». 583.

Id. — « Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani $\sum a_n Z^n = g(n)$ per n intero positivo con $g(n)$ trascendente intero ». 584, 723.

Monterosso B. — « Sulla prevalenza della struttura sinciziale nell'organizzazione di " Peroderma cylindricum " Heller ». 278.

Id. — « La struttura del corpo di " Peroderma cylindricum " Heller, in relazione alla " Teoria cellulare " ». 428, 507.

Morpurgo B. — Commemora il Socio sen. Golgi. 569.

N

Nannei B. — « Effetti immediati ed effetti ereditari nella torsione di un filo di bismuto ». 310.

Nasini R. — Offre in dono due pubblicazioni, dovute alla munificenza di C. Serono, una del dott. G. Carbonelli e l'altra di P. Capparoni. 171.

Id. — « L'acido ortoborico è volatile nel vapor d'acqua? A proposito di una recente pubblicazione del prof. R. Anschütz ». 247.

Natta G. e Reina A. — « Sugli ossidi e idrati del cobalto ». 691.

Natta G. e Schmidt F. — « Sugli ossidi di idrati di cobalto. - Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto ». 716.

P

Palazzo L. — Dà notizie sui risultati ottenuti nella missione per la eclisse e nella missione, svolta per incarico del Ministero della Marina, e consistente nei rilievi magnetici nell'ámbito delle nostre Colonie dell'Est Africa. 569.

Parona C. F. — Commemora il Socio Straniero Archibald Geikie. 167.

Parravano N. — Presenta, perchè sia sottoposta ad esame, la Memoria di E. Oliveri Mandalà intitolata: « Sintesi con l'acido azotidrico ». 443.

Id. (Relatore). — Anche a nome del Corrisp. G. Pellizzari, riferisce favorevolmente per l'inserzione nei volumi accademici della Memoria: « Sintesi con l'acido azotidrico » di E. Mandalà Olivieri. 570.

Pasquini P. — « Su la struttura del pettine e sul significato morfologico e funzionale di esso nell'occhio degli uccelli ». 98.

Id. — « Mancata chiusura del blastoporo e successivo sviluppo di ova segmentate di " Rana esculenta " sottoposte a rapida centrifugazione ». 624.

Pellizzari G. — Vedi Parravano N.

Pelosi L. — « Sopra alcuni massimi e minimi geometrici ». 584, 650.

Persico E. — « La polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato ». 410, 561.

Id. — « Ancora sulla polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato ». 603.

Peserico E. — « Variazione di resistenza elettrica della ghiandola sottomascellare durante l'attività funzionale ». 346.

Id. — « Come si modifichi la conduttività elettrica della ghiandola sottomascellare durante la sua attività funzionale ». 568, 615.

Perucca E. — « Sulla causa delle " ombre volanti " ». 476.

Piccardi G. — « Sul potenziale di ionizzazione dell'argento ». 489.

Id. — « Affinità dell'atomo neutro di bromo per l'elettrone ». 413, 566.

Piccardi P. — Vedi Rolla L.

Picone M. — « Sulla durata delle piccole oscillazioni del più generale pendolo curvilineo ». 401.

Id. — « Sulle singolarità delle funzioni armoniche ». 547, 655.

Picotti M. — « I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave " Marsigli " nello stretto di Messina ». 607, 686.

Pierucci M. — « Sulla " energia totale " dei pianeti ». 20.

Pirotta R. — Come presidente della seduta, rivolge auguri di guarigione al sen. Volterra (Presidente) e al professore Castelnuovo (Segretario). 288.

Id. — Porge il saluto al prof. Birkhoff della Università americana di Harward, presente alla seduta. 288.

Pirovano A. — « Sulla possibilità di ibridare specie poco affini col mezzo della jonolisi ». 692, 762.

Poggi R. e Polverini A. — « Sulla distruzione dei filtri con ossidanti alternati applicata all'analisi quantitativa ». 691.

Id. e Id. — « Sopra la determinazione del fosforo e dell'arsenico nelle sostanze organiche ». 691.

Pontremoli A. — « Circa alcune nuove ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento ». 75.

Id. — « Sulla durata di emissione delle radiazioni monocromatiche e la vita media degli stati stazionari ». 149.

Proviero. A. — « Sull'uso dello smorzamento nei sismografi ». 321.

Q

Quercigh E. — « Sulla natura della stibiobismutite ». 691.

Quilico A. — « Esame röntgengrafico degli idruri metallici. Idruri di rame ». 762.

R

Raimondi E. — « Trasformazione conforme che serve per lo studio di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». 24.

Rasetti F. — « Sopra la polarizzazione della luce emessa per urto elettronico ». 484.

Id. — « Sopra l'effetto Doppler nella fluoroscenza sensibilizzata ». 761.

Remotti E. — « Su alcune reazioni a stimoli luminosi e loro probabile rapporto a dispositivi morfologici nei salmonidi in via di sviluppo ». 772.

Rolla L. e Piccardi G. — « Potenziali di ionizzazione di alcuni elementi del gruppo delle terre rare ». 410.

Ronchi V. — « A proposito di recenti teorie sulle " ombre volanti " ». 267.

Id. — « I reticoli zonali come interferometri obbiettivi ». 403.

Id. — « Sul limite di risoluzione degli apparati spettroscopici ». 607, 680.

Rosenblatt A. — « Sur le cas de la collision générale dans le problème des trois corps ». 69.

Id. — « Sur la régularisation du problème plan des trois corps ». 271.

Ruiz C. — « Sulla baritina della miniera Giona (Racalmuto) ». 342.

Id. — « Nuove ricerche sulla baritina di Racalmuto in Sicilia ». 419, 491.

Russo A. — « " Individui misti " e " Gametogeni " (1914 Russo), " Individui neutri " e " Preconiugati " (1925 Dogiel) nel ciclo biologico dei Ciliati, in rapporto a quello dei Metazoi ». 262.

Id. — « Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura sinciziale in " Cryptochilum Echini " Maupas ». 375.

Id. — « Gli exconiuganti, derivati dalla 1ª coniugazione accessoria fra Gameti impuri in " Crytochilum Echini ", producono Gametogeni puri e Gameti puri, che rinnovano il ciclo principale ». 459.

Id. — « Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura sinciziale in " Chriptochilum Echini " Maupas ». 527.

Russo A. — « I due cicli sessuati di " Chryptochilum Echini " Maupas si svolgono con due categorie d' individui, che si dividono e si rinnovano con modalità diverse ». 649, 720.

S

Sabbatani L. — Commemora il Socio prof. Gaetano Gaglio. 428.

Saccardi P. — « Su di una reazione cromatica della pelle relativa alla genesi delle melanine ». 155.

Sacco F. — « La galleria del Drink (Valle d' Aosta) ». 375, 455, 526, 577.

Sandonnini G. — « Colori di mescolanza dell' acqua con acido acetico e con alcool isopropilico ». 761.

Savastano G. — « Sulla improduttività del pistacchio in Sicilia ». 569, 619.

Sbrana F. — « Effetto dinamico di un fluido che circola attorno a due cilindri ad assi paralleli ». 136.

Scorza G. — « La risoluzione apiristica delle conseguenze binomie e la formula di interpolazione di Lagrange ». 390.

Seliverstoff G. — Vedi Kolmogoroff A.

Sella M. — « Le migrazioni dei tonni studiate per mezzo degli ami ». 618, 696.

Severi F. — Fa omaggio della 2ª edizione del « Trattato di geometria proiettiva ». 444.

Id. — Vedi Castelnuovo G.

Severini C. — « Ancora sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali ». 13.

Sibilia C. — « Azione di alcuni enzimi di Fusarium ». 165.

Silvestri. — Commemora il Socio senatore Battista Grassi. 701.

Soula J. — « Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet ». 737.

Stella Starabba F. — « Sopra due differenti diagrammi d' eruttività dei vulcani giapponesi ». 420.

Id. — « Sulla distribuzione mensile delle eruzioni dei vulcani giapponesi accompagnate da alluvioni ». 499.

Straneo P. — « Basi fisiche per una estensione della teoria dei fenomeni ereditari ». 316.

Stringher B. — Commemora S. M. la Regina Margherita di Savoia. 48.

T

Terracini A. — « Sul significato geometrico della normale proiettiva ». 394, 584.

Tonelli L. — « Sulla quadratura della superficie ». 357, 445, 517, 633.

Id. — « Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione ». 580, 714.

Tonolo A. — « Sulle equazioni per la rappresentabilità conforme di una varietà a tre dimensioni sullo spazio euclideo ». 547, 581.

Tricomi F. — « Formula d' inversione dell' ordine di due integrazioni doppie " con asterisco " ». 394, 535.

V

Vacca G. — « Nuova serie per la costante di Eulero, C = 0.577... ». 19.

Vercelli F. — « I risultati delle crociere della R. Nave " Marsigli " nello stretto di Messina ». 756.

Volterra (Presidente) — Annuncia la morte del Corrisp. Alberto Peratoner, del Corrisp. Antonio Antoniazzi, del Corrisp. Vittorio Fiorini e della Socia Contessa Ersilia Lovatelli Caetani. 43.

Id. — Comunica che la Socia Contessa Ersilia Lovatelli Caetani ha per testamento lasciata all' Accademia de' Lincei la sua ricca biblioteca. 44.

Id. — Legge i telegrammi con i quali dichiarano di associarsi alle onoranze del Socio Ricci-Curbastro la Presidenza della Facoltà di Scienze ed il R. Commissario di Padova. 44.

Id. — Presenta il volumetto che racchiude i pensieri di Quintino Sella e ne legge alcuni passi. 45.

Id. — Presenta, per esser sottoposte ad esame, le Memorie di B. Segre, M. Piazza, P. Principi, A. Valobra. 170.

VOLTERRA (Presidente). — Comunica una lettera del dott. A. PAIS, il quale chiede che venga aperto un suo piego suggellato contenente una sua Nota da sottaporre all'esame di una Commissione 170.

ID. — Comunica il telegramma inviato a S. E. il Presidente del Consiglio con le felicitazioni dell'Accademia per lo scampato pericolo. 443.

ID. — Segnala la costituzione dell'Istituto Marchigiano di scienze, lettere ed arti in Ancona. 443.

ID. — Saluta, a nome dell'Accademia, il prof. A. ROSENBLATT, della Università di Cracovia, presente alla seduta. 443.

ID. — Commemora il Socio straniero KAMERLINGH ONNES HEIKE. 443.

ID. — Offre la pubblicazione dell'ing. MAZZONE SANGIORGI e segnala quella di BOULIGAUD. 444.

ID. — Dà il bentornato al Corrisp. PALAZZO reduce dalla spedizione scientifica per l'osservazione della eclisse solare nell'Oltre Giuba. 569.

ID. — Ringrazia gli intervenuti ad onorare la memoria del Socio senatore GOLGI. 569.

VOLTERRA V. — « Variazione e fluttuazione nel numero d'individui in ispecie animali conviventi ». (Memoria). 173.

VRANCEANU G. — « Sulla integrazione del problema dei due corpi nel caso in cui la massa sia funzione lineare del tempo ». 192.

ID. — « Sopra una classe di sistemi anolonomi ». 395.

ID. — « Sul teorema di Dirichlet ». 468.

ID. — « Sopra una classe di sistemi anolonomi ». 548.

W

WEINSTEIN A. — « Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire ». 463.

WEINSTEIN A. — « Sur les jets liquides à parois donnés ». 679.

Z

ZAMBONINI F. (Relatore). — Anche a nome del Socio F. MILLOSEVICH, riferisce favorevolmente per l'inserzione nei volumi accademici della Memoria: « Studio cristallografico di alcuni cristalli di Euclase del Brasile » della dott.ssa MARIA PIAZZA. 443, 570.

ZAMBONINI F. — « Sulla presenza, tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di una varietà cesifera del fluoborato di potassio ». 526, 644.

ID. — Commemora il Socio CARLO VIOLA. 701.

ZAMBONINI F. e CONIGLIO L. — « Sulla presenza, in alcuni prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di quantità notevoli di composti di cesio ». 521.

ZAMBONINI F. e RESTAINO S. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – V. Solfati di cerio (ceroso) e ammonio ». 178.

ID. e ID. — « VI. Solfati di cerio (ceroso) e potassio ». 649.

ZARISKI O. — « Sull'impossibilità di risolvere parametricamente per radicali una equazione algebrica a moduli generali ». 547.

ID. — « Sull'impossibilità di risolvere parametricamente per radicali un'equazione algebrica $f(xy) = 0$ di genere $p > 6$ a moduli generali ». 660.

ID. — « Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata di una lemniscata sopra un cerchio ». 666.

ID. — « Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici ». 737.

INDICE PER MATERIE

A

Anatomia comparata. — « Su la struttura del pettine e sul significato morfologico e funzionale di esso nell'occhio degli uccelli ». P. Pasquini. 98.

— « Mancata chiusura del blastoporo e successivo sviluppo di uova segmentate di " Rana esculenta " sottoposte a rapida centrifugazione ». Id. 624.

Astrofisica. — « Sull'altezza della cromosfera solare ». G. Abetti. 140.

— « Sulla struttura della riga Hα nella cromosfera solare ». Id. 568, 594.

— « A proposito di recenti teorie sulle " ombre volanti " ». V. Ronchi. 267.

— « I reticoli zonali come interferometri obbiettivi ». Id. 403.

— « Sul limite di risoluzione degli apparati spettroscopici ». Id. 607, 680.

— « Sulla causa delle " ombre volanti " ». E. Perucca. 476.

Astronomia. — « Sul catalogo ortografico di Catania ». A. Bemporad. 520.

— « Sulla teoria delle ombre volanti ». G. Horn-D'Arturo. 554, 591.

Astronomia teoretica. — « Sulla " energia totale " dei pianeti ». M. Pierucci. 20.

B

Batteriologia. — « Sulla microflora del silò italiano ». C. Gorini. 629.

Biochimica. — « Su di una reazione cromatica della pelle relativa alla genesi delle melanine ». P. Saccardi. 155.

Biologia. — « La partenogenesi nei bachi da seta come esponente delle capacità fisiologiche individuali e di razza ». C. Jucci. 32.

— « La capacità di partenogenesi delle uova di seconda generazione di razza bivoltina di bachi da seta ». Id. 350.

— « Sulla biologia dei Petromizonti. — III. Il fenomeno dell'accorciamento nella maturità sessuale del " Petromyzon marinus " ». G. Cotronei. 37.

— « Cordoni oscuri e cordoni chiari nell'organo insulare di " Petromyzon marinus " ». Id. 428, 503.

— « Morfologia ed ecologia nello studio dei Petromizonti ». Id. 767.

— « Condizioni fisico-biologiche e determinismo della reazione di Kottmann ». U. De Castro. 159.

— « " Individui misti " e " Gametogeni " (1914 Russo), " Individui neutri " e " Preconiugati " (1925 Dogiel) nel ciclo biologico dei Ciliati, in rapporto a quello dei Metazoi ». A. Russo. 262.

— « Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura sinciziale in " Cryptochilum Echini " Maupas ». Id. 375.

— « Gli exconiuganti, derivati dalla 1ª coniugazione accessoria fra Gameti impuri in " Cryptochilum Echini ", producono Gametogeni puri e Gameti puri, che rinnovano il ciclo principale ». Id. 459.

— « Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura sinciziale in " Cryptochilum Echini " Maupas ». Id. 527.

— « I due cicli sessuati di " Cryptochilum Echini " Maupas si svolgono con due

categorie d'individui, che si dividono e si rinnovano con modalità diverse ». A. Russo. 649, 720.

Biologia. — « Sulla prevalenza della struttura sinciziale nell'organizzazione di "Peroderma cylindricum" Heller ». B. Monterosso. 278.

— « La struttura del corpo di "Peroderma cylindricum" Heller, in relazione alla "Teoria cellulare" ». Id. 428, 507.

— « Su alcune reazioni a stimoli luminosi e loro probabile rapporto a dispositivi morfologici nei salmonidi in via di sviluppo ». E. Remotti. 772.

Biologia marina. — « Di un caso di rigenerazione funzionale in "Cyprinodon calaritanus C. V." ». G. Fadda. 40.

Biologia vegetale. — « Sulla improduttività del pistacchio in Sicilia ». G. Savastano. 569, 619.

Botanica. — « Sulla possibilità di ibridare specie poco affini col mezzo della jonolisi ». A. Pirovano. 692, 762.

— « Il *virus* della malattia del giallume del baco da seta in rapporto alle moderne teorie sui *virus* filtrabili ». C. Acqua. 767.

Bullettino bibliografico. 237, 355, 511, 571, 703.

C

Chimica. — « Su un preteso nitroprussiato del ferro bivalente ». L. Cambi. 8.

— « L'azione catalitica dei metalli del gruppo del platino e il loro grado di suddivisione ». R. G. Levi e R. Haardt. 91, 215.

— « L'acido ortoborico è volatile nel vapor d'acqua? A proposito di una recente pubblicazione del prof. A. Anschütz ». R. Nasini. 247.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – V. Solfati di cerio (ceroso) e ammonio ». F. Zambonini e S. Restaino. 178.

— Id. « VI. Solfati di cerio (ceroso) e potassio ». Id. 649.

Chimica. — « Sulla composizione chimica dell'ortite di Ambatofotsikely (Madagascar) ». G. Carobbi. 206.

— « Un nuovo esempio di cristalli misti anomali ». V. Caglioti. 332.

— « Una pretesa priorità a proposito della conducibilità delle catene non sature ». A. Angeli. 371.

— « Sopra le anomalie di alcune reazioni ». Id. 450.

— « Sulla presenza, tra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di una varietà cesifera del fluoborato di potassio ». F. Zambonini. 526, 644.

— « Sulla presenza, in alcuni prodotti dell'attuale attività del Vesuvio, di quantità notevoli di composti di cesio ». F. Zambonini e L. Coniglio. 521.

— « Sui modelli dell'atomo d'elio ». U. Crudeli. 565, 666.

— « Sulla distruzione dei filtri con ossidanti alternati applicata all'analisi quantitativa ». R. Poggi e A. Polverini. 691.

— « Sugli ossidi e idrati del cobalto ». G. Natta e A. Reina. 691.

— « Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti ». G. Bruni e A. Ferrari. 720.

— « Sugli ossidi di idrati di cobalto. — Struttura cristallina dell'ossido salino di cobalto ». G. Natta e F. Schmidt. 761.

— « Esame röntgengrafico degli idruri metallici. – Idruri di rame ». A. Quilico. 762.

Chimica-fisica. — « L'esame röntgengrafico dei reticoli cristallini del fluoruro manganoso e del biossido di manganese ». A. Ferrari. 224.

— « Confronto fra i diametri di ioni dello stesso elemento, ma aventi cariche diverse ». Id. 275.

— « La struttura cristallina di alcuni fluoruri di metalli bivalenti. FeF_2, CoF_2, NiF_2 e ZnF_2 anidri ». Id. 324.

— « Potenziali di ionizzazione di alcuni elementi del gruppo delle terre rare ». L. Rolla e G. Piccardi. 410.

— « Affinità dell'atomo neutro di bromo per l'elettrone ». G. Piccardi. 413, 566.

Chimica-fisica. — « Sul potenziale di ionizzazione dell'argento ». G. Piccardi. 489.

Chimica organica. — « Sopra la determinazione del fosforo e dell'arsenico nelle sostanze organiche ». R. Poggi e A. Polverini. 691.

Commissioni (relazioni di) 171, 443, 570.

Comunicazioni varie. — 44, 170, 288, 443, 569, 701.

E

Embriologia generale. — « Mancata chiusura del blastoporo e successivo sviluppo di ossa segmentate di " Rana esculenta " sottoposte a rapida centrifugazione ». F. Raffaele. 624.

Embriologia vegetale. — « Fenomeni di aposporia e di apogomia in " Artemisia nitida Bertol. " ». A. Chiarugi. 281.

F

Fisica. — « Sulla teoria elettronica dei fenomeni termomagnetici ». O. M. Corbino. 3.

— « I fenomeni magneto-ottici nei campi rapidamente variabili ». Id. 173.

— « Ancora sulla teoria elettronica dei fenomeni termomagnetici ». Id. 250.

— « Sulle frange di Perot e Fabry prodotte con una lamina birifrangente semiargentata ». Id. 370, 573.

— « Il principio di Doppler e la ipotesi balistica della luce ». O. M. Corbino e T. Levi-Civita. 644, 705.

— « Ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento ». D. Graffi. 28.

— « Circa alcune nuove ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento ». A. Pontremoli. 75.

— « Sulla durata di emissione delle radiazioni monocromatiche e la vita media degli stati stazionari ». Id. 149.

Fisica. — « Sulla propagazione di correnti elettriche stazionarie sotto l'azione di un campo magnetico ». E. Freda. 77.

— « Sull'effetto fotoelettrico composto ». A. Carrelli. 82.

— « Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico ». E. Fermi. 145.

— « Sopra l'intensità delle righe proibite, nei campi magnetici intensi ». Id. 478.

— « Sullo spettro di assorbimento dei permanganati di K e Ca ». E. Adinolfi. 196.

— « Sul comportamento del Selenio sottoposto all'azione delle radiazioni del Mesotorio ». W. Del Regno. 201.

— « Effetti immediati ed effetti ereditari nella torsione di un filo di bismuto ». B. Nannei. 310.

— « Basi fisiche per una estensione della teoria dei fenomeni ereditari ». P. Straneo. 316.

— « Risposta ad una critica ». M. Cantone. 370, 524.

— « Sulla trasmissione di calore per irradiamento ». U. Bordoni. 410, 554.

— « La polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato ». E. Persico. 410, 561.

— « Ancora sulla polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato ». Id. 603.

— « Sopra la polarizzazione della luce emessa per urto elettronico ». F. Rasetti. 484.

— « Sopra l'effetto Doppler nella fluorescenza sensibilizzata ». Id. 761.

— « Un nuovo metodo per la misura di distanze dei reticoli di diffrazione ». G. De Mottoni. 686, 750.

— « Colori di mescolanza dell'acqua con acido acetico e con alcool isopropilico ». G. Sandonnini. 761.

Fisica-chimica. — « I risultati delle ricerche fisico-chimiche compiute nelle crociere della R. Nave " Marsigli " nello stretto di Messina ». M. Picotti. 607, 686.

Fisica matematica. — « Campo elettrostatico dovuto a un qualunque numero di sottili conduttori elettrizzati di forma cilindrica ad assi paralleli ». U. Cisotti. 289.

Fisica terrestre. — « Sull'uso dello smorzamento nei sismografi ». A. Provero. 321.

Fisiologia. — « Variazione di resistenza elettrica della ghiandola sottomascellare durante l'attività funzionale ». E. Peserico. 346.

— « Come si modifichi la conduttività elettrica della ghiandola sottomascellare durante la sua attività funzionale ». Id. 568, 615.

Fisiologia vegetale. — « Azione di alcuni enzimi di Fusarium ». C. Sibilia. 165.

G

Genetica. — « La ibridazione nel "Papaver somniferum L." in relazione al titolo di morfina dell'oppio ». F. Cavara e A. Chistoni. 113.

Geodesia. — « Determinazione astronomica di latitudine e azimut eseguita a Capo Noli nel 1911 ». U. Barbieri. 554, 607.

— « Sullo scostamento geodetico ». T. Boggio. 749.

Geofisica. — « Valutazione dello smorzamento nei pendoli sismografici ». A. Belluigi. 691.

— « I risultati delle crociere della R. Nave "Marsigli" nello stretto di Messina ». F. Vercelli. 756.

Geologia. — « Le scoperte di foraminifere priaboniane nelle "arenarie di Taveyannaz" confermanti l'età eocenica delle "arenarie di Annot », dimostrata nel 1916 ». S. Franchi. 60.

— « Passaggi graduali a forme cristalline, calcescistose e marmoree, del Nummulitico e del Cretaceo fossiliferi nelle Valli del Gesso e della Stura di Cuneo ». Id. 257.

— « La continuità di alcune zone dell'Eocene dalle Alpi Marittime all'Appennino ligure e l'età delle argille scogliose ». Id. 375.

— « La Galleria del Drink (Valle d'Aosta) ». F. Sacco. 375, 455, 526, 577.

Geologia. — « Osservazioni geologiche sull'isola di Asinello e sugli scogli vicini (Carnaro) ». G. Cumin. 419, 494.

— « Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio (Palermo) ». R. Fabiani. 568, 612.

Geometria. — « La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato ». F. Bompiani. 395.

— « Sul significato geometrico della normale proiettiva ». A. Terracini. 584.

I

Idromeccanica. — « Trasformazione conforme che serve per lo studio di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». E. Raimondi. 24.

— « Azioni meccaniche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro ». U. Cisotti. 53.

— « Effetti dinamici di un fluido che circola tra quantisivogliano cilindri sottili ad assi paralleli ». Id. 517.

— « Moti spaziali vorticosi in corrispondenza univoca con traslazioni uniformi ». B. Finzi. 130.

— « Effetto dinamico di un fluido che circola attorno a due cilindri ad assi paralleli », F. Sbrana. 136.

— « Rotazione uniforme di un solido cilindrico in un liquido perfetto indefinito. Estensione del teorema di Kutta e Joukowski ». A. Masotti. 233.

— « Una estensione delle formule del Blasius ». Id. 403, 472.

Istologia. — « Contributo all'istofisiologia della fibra muscolare striata ». U. D'Ancona. 284.

L

Libri (presentazione di) 44, 171, 288, 444, 570, 701.

M

Matematica. — « Ancora sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali ». C. Severini. 13.
— « Nuova serie per la costante di Eulero, C = 0,577 · · · ». G. Vacca. 19.
— « Forma canonica dei ds^2 per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici ». H. Levy. 65.
— « Sopra alcune proprietà degli spazi per i quali si annullano i simboli di Reimann a cinque indici », Id. 124.
— « Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica ». Id. 737.
— « Sul principio della media aritmetica ». G. Bemporad. 87.
— « Circa un nuovo metodo di studio sui risultati di esperienza ». Id. 189.
— « Sul catalogo astrografico di Catania ». Id. 520, 639.
— « Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane ». E. Bompiani. 118.
— « Variazione e fluttuazione nel numero d'individui in ispecie animali conviventi ». — *Memoria.* V. Volterra. 173.
— « Risoluzione dei problemi armonici in un'area piana indefinitamente con *n* lacune circolari di piccolo diametro ». U. Cisotti. 184.
— « Sulle superficie continue che ammettono area finita ». G. Lampariello. 294.
— « Sul problema del Dini ». M. G. des Lauriers. 302.
— « Sugli spazi geodeticamente applicabili all'infuori del caso Dini ». Id. 383.
— « Sur la convergence des séries de Fourier ». A. Kolmogoroff e G. Seliverstoff. 307.
— « Sulla quadratura della superficie ». L. Tonelli, 357, 445, 517, 633.
— « Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione ». Id. 580, 714.
— « Su di una presunta proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine ». A. Colucci. 376.
— « Determinazione dei gruppi a un parametro di funzionali lineari ». L. Fantappiè. 378.
Matematica. — « I funzionali analitici non lineari ». L. Fantappiè. 529.
— « La risoluzione apiristica delle conseguenze binomie e la formula di interpolazione di Lagrange ». G. Scorza. 390.
— « Sul significato geometrico della normale proiettiva ». A. Terracini. 394, 584.
— « Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie " con asterisco " ». F. Tricomi. 394, 535.
— « Sulla unicità delle funzioni interpolari soddisfacenti a certe condizioni asintotiche ». V. Bernstein. 540.
— « Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano ». Id. 583, 732.
— « Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure ». F. Cartan. 544.
— « Sulle equazioni per la rappresentabilità conforme di una varietà a tre dimensioni sullo spazio euclideo ». A. Tonolo. 547, 581.
— « Sull'impossibilità di risolvere parametricamente per radicali un'equazione algebrica a moduli generali ». O. Zariski. 547.
— « Sull'impossibilità di risolvere parametricamente per radicali un'equazione algebrica $f(xy) = 0$ di genere $p > 6$ a moduli generali ». Id. 660.
— « Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata di una cassinoide sopra un cerchio ». Id. 666.
— « Sullo sviluppo di una funzione algebrica in un cerchio contenente più punti critici ». Id. 737.
— « Sulla ricerca delle singolarità delle $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n Z^n$ ove $a_n = g(n)$ per n intero positivo con $g(n)$ trascendente intero ». S. Minetti. 583.
— « Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani $\sum a_n Z^n = g(n)$ per n intero positivo con $g(n)$ trascendente intero ». Id. 584, 723.
— « Sopra alcuni massimi e minimi geometrici ». L. Pelosi. 584, 650.

Matematica. — « Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari ». G. Fano. 639.
— « Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione ». T. Levi-Civita. 714.
— « Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet ». J. Soula. 737.
— « Les paramètres locaux dans une variété de Rieman ». V. Hlavaty. 737.
Meccanica. — « Sur le cas de la collision générale dans le problème des trois corps ». A. Rosenblatt. 69.
— « Sur la régularisation du problème plan des trois corps ». Id. 271.
— « Possibilità di superaviazione ». G. A. Crocco. 241, 363.
— « Un paradosso del propulsore a reazione ». Id. 370.
— « Sulla generalizzazione di una notevole formula di Joukovsky nel moto per inerzia di un giroscopio semirigido ». O. Lazzarino. 298.
— « Sulla durata delle piccole oscillazioni del più generale pendolo curvilineo ». M. Picone. 401.
— « Sulle singolarità delle funzioni armoniche ». Id. 547, 655.
— « Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire ». A. Weinstein. 463.
— « Sur les jets liquides à parois donnés ». Id. 679.
— « Sopra una classe di sistemi anolonomi ». G. Vranceanu. 395, 548.
— « Sul teorema di Dirichlet ». Id. 468.
— « Sulle distorsioni elastiche ». P. Burgatti. 513.
— « Sur les oscillation d'un liquide en vases communicants ». R. Mazet. 554, 673.
— « Alcune nuove proprietà della precessione balistica ». F. Burzio. 554, 599.
— « Sulla legge di Mayevski per la precessione balistica ». Id. 679, 737.
— « Ordine di grandezza delle quantità relative al 2° problema balistico ». Id. 749.
— « Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico ». G. Krall. 679, 744.
Meccanica celeste. — « Sulla integrazione del problema dei due corpi nel caso in cui la massa sia funzione lineare del tempo ». G. Vranceanu. 192.
Microbiologia. — « Sulla microflora del silò italiano ». C. Gorini. 569, 629.
Mineralogia. — « Sull' antimonite di Wolfsberg (Harz) ». P. Gravino. 210.
— « Sopra una spessartina cromifera di St.-Barthélemy (Valle d'Aosta) ». E. Carozzi. 230.
— « Osservazioni sulla vulfenite e vanadinite di Oudida (Marocco) ». P. Comucci. 335.
— « Sulla baritina della miniera Giona (Racalmuto) ». C. Ruiz. 342.
— « Nuove ricerche sulla baritina di Racalmuto in Sicilia ». Id. 419, 491.
— « Sulla bismutinite di St. Agnes (Cornovaglia) ». G. Lugaro. 416.
— « Sulla natura della stibiobismutite ». E. Quercich. 691.

N

Necrologie. — Annuncio della morte del Corrisp. Alberto Peratoner, del Corrisp. Antonio Antoniazzi, del Corrisp. Vittorio Fiorini e della Socia Contessa Ersilia Lovatelli Caetani. 43.
— Commemorazione del Socio Gregorio Ricci-Curbastro. 44.
— Commemorazione del Socio Guido Banti. 44, 103.
— Commemorazione di S. M. la Regina Margherita di Savoia. 48.
— Commemorazione del Socio straniero Archibald Geikie. 167.
— Commemorazione del Socio prof. Gaetano Gaglio. 428.
— Commemorazione del Socio prof. Aristide Stefani. 433.
— Commemorazione del Socio straniero Kamerlingh Onnes Heike. 443.
— Commemorazione del Socio sen. Golgi. 569.
— Commemorazione del Corrisp. Antonio Antoniazzi. 701.

Necrologie. — Commemorazione del Socio straniero Giorgio Augusto Schweinfurth. 701.
— Commemorazione del Socio Battista Grassi. 701.
— Commemorazione del Socio Carlo Viola. 701.

V

Vulcanologia. — « Sopra due differenti diagrammi d'eruttività dei vulcani giapponesi ». F. Stella Starabba. 420.

Vulcanologia. — « Sulla distribuzione mensile delle eruzioni dei vulcani giapponesi accompagnate da alluvioni ». F. Stella Starabba. 499.

Z

Zoologia. — « Le migrazioni dei tonni studiate per mezzo degli ami ». M. Sella. 618, 696.
— « Conformazione dello stomaco dei pesci Teleostei in rapporto con la nutrizione ». E. Bertolini. 692.